Engineering Library

MAY 25 1931

ZEITSCHRIFT FÜR ANGEWANDTE MATHEMATIK UND MECHANIK

INGENIEURWISSENSCHAFTLICHE FORSCHUNGSARBEITEN

HERAUSGEGEBEN VON PROFESSOR R. VON MISES, BERLIN

Unter Mitwirkung von L. FÖPPL-München, G. HAMEL-Charlottenburg, Th. v. KÁRMÁN-Aachen, R. MOLLIER-Dresden, L. PRANDTL-Göttingen, H. REISSNER-Charlottenburg, R. RÜDENBERG-Berlin

:: Band 11 :: Seite 81 bis 164

:: Heft 2 :: April 1931

INHALT:

V·D·I-VERLAG G.M.B.H., BERLIN NW 7

Bezugsbedingungen und Anzeigenpreise auf der 3. Umschlagseite.

Z. f. ang. Mathem. u. Mech. / Berlin, März/April 1931 / Bd. 11 / Heft 2, Seite 81—164.

Copyright by VDI-Verlag G. m. b. H., Berlin NW 7

FORSCHUNGSARBEITEN
AUF DEM GEBIETE DES INGENIEURWESENS

Die neusten Hefte:

Heft 327: **Plötzliche Umlenkung (Stoß) von Wasser in geschlossenen unter Druck durchströmten Kanälen.** Von Dr.-Ing. *R. Bambach.* DIN A 4, IV/28 Seiten mit 55 Abbildungen u. 4 Zahlentafeln. Broschiert RM 5,50 (für VDI-Mitglieder RM 5,—).

Heft 328: **Beitrag zur Frage der Ermittelung der mechanischen Verluste bei Schachtförderanlagen.** Von Dr.-Ing. *A. Vierling.* DIN A 4, IV/35 Seiten mit 36 Abbildungen und 12 Zahlentafeln. Broschiert RM 6,— (für VDI-Mitglieder RM 5,40).

Heft 329: **Dauerversuche an der Hochfrequenz-Zug-Druck-Maschine** (Bauart Schenk). Von *K. Memmler* und *K. Laute.* DIN A 4, IV/32 Seiten mit 60 Abbildungen und 11 Zahlentafeln. Brosch. 6.— RM. (für VDI-Mitglieder 5,40 RM).

Heft 330: **Über die Einwirkung von Laugen und Salzen auf Flußeisen unter Hochdruckbedingungen und über die Schutzwirkung von Natriumsulfat gegen den Angriff von Ätznatron und von Chlormagnesium.** Von Prof. Dr. *E. Berl* und Dr.-Ing. *F. van Taack.* DIN A 4, IV/32 Seiten mit 34 Abbildungen und 33 Zahlentafeln. Broschiert RM 5,— (für VDI-Mitglieder RM 4,50).

Heft 331: **Zur Frage der Beanspruchung beim Dauerschlagversuch.** Von Dr.-Ing. *Siegfried Berg.* DIN A 4, IV/28 Seiten mit 33 Abbildungen und 15 Zahlentafeln. Broschiert RM 5,— (für VDI-Mitglieder RM 4,50).

Heft 332: **Einfluß der Schweißstrombedingungen bei der elektr. Lichtbogenschweißung von weichem Flußstahl.** Von Dr.-Ing. *N. Lefring.* DIN A 4, IV/53 Seiten mit 59 Abbildungen und 3 Zahlentafeln. Broschiert RM 10,— (für VDI-Mitglieder RM 9,—).

Heft 333: **Gewichtverlegung und Ausnutzung des Reibungsgewichtes bei elektrischen Lokomotiven mit Einzelachsantrieb.** Von Dr.-Ing. *H. G. Lindner.* DIN A 4, IV/25 Seiten mit 32 Abbildungen, 2 Zahlentafeln und 2 Tabellen. Broschiert RM 5,— (für VDI-Mitglieder RM 4,50).

Heft 334: **Untersuchungen an der Dieselmaschine: Der Spül- und Ladevorgang bei Zweitaktmaschinen. Das Arbeitsverfahren raschlaufender Zweitakt-Vergasermaschinen.** Von Prof. Dr.-Ing. *K. Neumann* und Dr.-Ing. *O. Klüsener.* DIN A 4, IV/46 Seiten mit 72 Abbildungen und 12 Zahlentafeln. Broschiert RM 8,50 (für VDI-Mitglieder RM 7,65).

Heft 335: **Die Werkstoff-Dämpfung bei Dreh- und Biegeschwingungsbeanspruchung.** Von *O. Föppl* und *G. Schaaf.* DIN A 4, IV/27 Seiten mit 54 Abb. Broschiert RM 5,— (für VDI-Mitglieder RM 4,50).

Heft 336: **Untersuchungen über den Einfluß von Umwicklungen der Schweißstäbe auf die mechanischen Festigkeitseigenschaften der Schweiße.** Von Dr.-Ing. *K. Baumgärtel.* DIN A 4, IV/33 Seiten mit 49 Abb. und 16 Zahlentafeln. Brosch. RM 4,50 (für VDI-Mitglieder RM 4,—).

Heft 338: **Der Druckabfall in gekrümmten glatten Rohrleitungen.** Von Dr.-Ing. *H. Richter.* DIN A 4, IV/30 Seiten mit 34 Abb. und 28 Zahlentafeln. Broschiert RM 5,50 (für VDI-Mitglieder RM 5,—).

Heft 339: **Die Zustandsgrößen des Sauerstoffs bei tiefen Temperaturen (mit Diagrammen).** Von Dr.-Ing. *F. Schmidt.* DIN A 4, IV/20 Seiten mit 7 Abbildungen und 4 Tafeln. Broschiert RM 4,— (für VDI-Mitglieder RM 3,60).

Heft 340: **Untersuchungen über das Klopfen von Vergasermotoren.** Von Dr.-Ing. *L. Auer.* DIN A 4, IV/18 Seiten mit 24 Abbildungen und 12 Zahlentafeln. Broschiert RM 5,— (für VDI-Mitglieder RM 4,50).

Heft 341: **Das Mitreißen von Wasser aus dem Dampfkessel.** Von Dr.-Ing. *H. Vorkauf.* DIN A 4, IV/22 Seiten mit 45 Abbildungen. Broschiert RM 5,— (für VDI-Mitglieder RM 4,50).

Heft 342: **Untersuchung von Automobilkühlern (Wasserröhrchenkühler).** Von Dr.-Ing. *K. Dehn.* DIN A 4, IV/20 Seiten mit 28 Abbildungen und 7 Zahlentafeln. Broschiert RM 5,— (für VDI-Mitglieder RM 4,50).

Die Reihe wird ab Heft 340 als regelmäßige Beilage zur Zeitschrift „Forschung auf dem Gebiete des Ingenieurwesens" (Ausgabe B) fortgesetzt. Die Hefte sind aber auch nach wie vor einzeln zu beziehen. Preis je 5.— RM (für VDI-Mitglieder 4.50 RM).

VDI-Verlag / Berlin

Durch jede Buchhandlung zu beziehen!

ZEITSCHRIFT FÜR ANGEWANDTE MATHEMATIK UND MECHANIK
INGENIEURWISSENSCHAFTLICHE FORSCHUNGSARBEITEN

Band 11 | April 1931 | Heft 2

Inhalt:

HAUPTAUFSÄTZE

Konforme Abbildung ebener Spannungszustände.

Von *Ludwig Föppl* in München.

Einleitung. Seit Einführung der Airyschen Spannungsfunktion zur Berechnung ebener Spannungszustände, die in England hauptsächlich von Michell verwendet worden ist — in Deutschland wurde sie durch F. Klein weiteren Kreisen bekannt —, ist es gelungen, eine größere Zahl wichtiger Spannungszustände in aller Strenge abzuleiten. Ein großer Vorteil der Airyschen Spannungsfunktion besteht in der einfachen Darstellung durch eine einzige Funktion $F(x, y)$, durch die sowohl der Spannungs- als auch der Formänderungszustand eindeutig bestimmt ist. Es gibt noch ein zweites Verfahren, ebene Spannungszustände zu gewinnen. Es verwendet gewisse Zusammenhänge, die zwischen den Eigenschaften komplexer analytischer Funktionen der Gaußschen Ebene und dem Spannungszustand bestehen. Deshalb wurde das Verfahren gelegentlich als das der komplexen Integration ebener Spannungszustände bezeichnet. Bisher ist diese Methode verhältnismäßig wenig verwendet worden. In „Drang und Zwang"[1]) ist ausführlich darauf hingewiesen worden, und neuerdings hat sie in einer Arbeit von E. Kohl[2]) Verwendung gefunden.

In der vorliegenden Arbeit werden beide Verfahren vereinigt. Es kommen die Vorteile beider Verfahren zur Geltung, so daß man dadurch einen wesentlich tieferen Einblick in die Theorie des ebenen Spannungszustandes gewinnt. Der Hauptvorteil der neuen Theorie besteht in der Möglichkeit, die konforme Abbildung anwenden zu können, wodurch neue Lösungen gewonnen werden können.

1. Das Verfahren, das die Airysche Spannungsfunktion zur Lösung von ebenen Spannungsaufgaben benützt, besteht bekanntlich darin, daß man die Spannungsfunktion $F(x, y)$ sucht, die mit den Spannungen durch die Beziehungen

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}; \quad \sigma_y = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}; \quad \tau_{x,y} = -\frac{\partial^2 F}{\partial x \, \partial y} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

verknüpft ist, wobei sich wegen der Gültigkeit des Hookeschen Gesetzes die Verträglichkeitsbedingung für die Spannungen in Form der partiellen Differentialgleichung vierter Ordnung

$$\Delta\Delta F = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

ansetzen läßt.

[1]) 1. Band, 2. Aufl. Oldenbourg 1924. S. 266.
[2]) E. Kohl, Beitrag zur Lösung des ebenen Spannungsproblems. ZAMM. Bd. 10, S. 141.

Die letzte Differentialgleichung ist invariant, d. h. vom Koordinatensystem unabhängig. Dasselbe gilt von den Beziehungen (1), so daß für irgend zwei zueinander senkrecht stehende Richtungen n und t, deren Linienelemente mit dn bzw. dt bezeichnet werden, gilt:

$$\sigma_n = \frac{\partial^2 F}{\partial t^2}; \quad \sigma_t = \frac{\partial^2 F}{\partial n^2}; \quad \tau_{n,t} = -\frac{\partial^2 F}{\partial t \, \partial n} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (3).$$

Die Hauptschwierigkeit besteht in der Anpassung der Lösung von Gl. (2) an die jeweils geforderten Grenzbedingungen. Besonders einfach gestalten sich die Grenzbedingungen an lastfreien Rändern. Hier ist nämlich längs des ganzen lastfreien Randes

$$\frac{\partial F}{\partial n} = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial t} = 0 \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (4),$$

und damit $F = \text{const}$; d. h. die Ableitungen der Spannungsfunktion in Richtung t der Tangente an die Randkurve und in Richtung n normal zum Rand verschwinden. Die Gl. (4) folgen aus den Bedingungen, daß die Spannungen normal und tangential zum Rand verschwinden. Im allgemeinen ist dagegen die Spannung $\sigma_t = \frac{\partial^2 F}{\partial n^2}$ längs des Randes von Null verschieden. Die Grenzbedingungen (4) für einen lastfreien Rand sind gleichbedeutend damit, daß längs des Randes die ersten Ableitungen nach irgendwelchen Richtungen, also auch $\frac{\partial F}{\partial x}$ und $\frac{\partial F}{\partial y}$ verschwinden. Wir werden davon später Gebrauch machen.

2. Das Verfahren der komplexen Integration[3]) geht von den Verschiebungsgrößen ξ und η parallel zur x- bzw. y-Achse aus. Damit erhält man die ebene Dehnung:

$$e = \varepsilon_x + \varepsilon_y = \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial \eta}{\partial y} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (5).$$

Die Spannungen drücken sich aus durch

$$\left.\begin{aligned} \sigma_x &= 2\,G\left(\frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{e}{m-1}\right); \\ \sigma_y &= 2\,G\left(\frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{e}{m-1}\right); \\ \tau_{xy} &= G \cdot \gamma_{xy} = G \cdot \left(\frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{\partial \xi}{\partial y}\right) \end{aligned}\right\} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (6).$$

Aus den Gl. (5) und (6) folgt:

$$\sigma_x + \sigma_y = 2\,G \cdot \frac{m+1}{m-1} \cdot e = E\,\frac{m}{m-1} \cdot e \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (7).$$

Die elastischen Grundgleichungen, denen die Verschiebungskomponenten genügen müssen, lauten für den ebenen Spannungszustand

$$\left.\begin{aligned} \Delta \xi + \frac{m+1}{m-1}\frac{\partial e}{\partial x} &= 0 \\ \Delta \eta + \frac{m+1}{m-1}\frac{\partial e}{\partial y} &= 0 \end{aligned}\right\} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (8).$$

Sie lassen sich in folgende Form umschreiben:

$$\left.\begin{aligned} \frac{2\,m}{m-1}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial \eta}{\partial y}\right) &= \frac{\partial}{\partial y}\left(-\frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial \eta}{\partial x}\right) \\ \frac{2\,m}{m-1}\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial \eta}{\partial y}\right) &= -\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial \eta}{\partial x} - \frac{\partial \xi}{\partial y}\right) \end{aligned}\right\} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (9).$$

Setzt man

$$\left.\begin{aligned} \frac{2\,m}{m-1}\left(\frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial \eta}{\partial y}\right) &= \varphi \\ \frac{\partial \eta}{\partial x} - \frac{\partial \xi}{\partial y} &= \psi \end{aligned}\right\} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (10),$$

[3]) Siehe Drang und Zwang, l. c.

so sieht man, daß die Gl. (9) nichts anderes als die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial \varphi}{\partial x} &= \frac{\partial \psi}{\partial y}\\ \frac{\partial \varphi}{\partial y} &= -\frac{\partial \psi}{\partial x}\end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (11)$$

für Real- und Imaginärteil der komplexen Funktion

$$\chi(z) = \varphi(x, y) + i\,\psi(x, y) \quad \ldots \quad (12)$$

in der Gaußschen Ebene $z = x + iy$ darstellen.

Die mechanische Bedeutung der beiden konjugiert komplexen Funktionen φ und ψ folgt aus den Gl. (5), (7) und (10) zu

$$\left.\begin{aligned}\varphi &= \frac{2m}{m-1}\left(\frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial \eta}{\partial y}\right) = \frac{2m}{m-1}\,e = \frac{2}{E}\cdot(\sigma_x + \sigma_y)\\ \psi &= \frac{\partial \eta}{\partial x} - \frac{\partial \xi}{\partial y} = 2\,\omega\end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (13),$$

worin ω die Winkeldrehung bedeutet. Für φ und ψ gelten die Differentialgleichungen

$$\left.\begin{aligned}\Delta \varphi &= 0\\ \Delta \psi &= 0\end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (14).$$

Neben der komplexen analytischen Funktion $\chi(z) = \varphi + i\psi$ brauchen wir später noch die Integralfunktion

$$\chi_1(z) = \int \chi(z)\,dz = \varphi_1 + i\,\psi_1 \quad \ldots \quad (15).$$

Es gelten dann die Gleichungen:

$$\frac{\partial \varphi_1}{\partial x} = \frac{\partial \psi_1}{\partial y} = \varphi\,; \quad \frac{\partial \varphi_1}{\partial y} = -\frac{\partial \psi_1}{\partial y} = -\psi \quad \ldots \quad (16),$$

sowie

$$\Delta \varphi_1 = 0\,; \quad \Delta \psi_1 = 0 \quad \ldots \quad (17).$$

Es soll an dieser Stelle auch gleich die Integralfunktion von χ_1 angeführt werden, die später auch eine Rolle spielen wird:

$$\chi_2(z) = \int \chi_1(z)\,dz = \varphi_2 + i\,\psi_2 \quad \ldots \quad (18).$$

Es gilt dann:

$$\frac{\partial \varphi_2}{\partial x} = \frac{\partial \psi_2}{\partial y} = \varphi_1\,; \quad \frac{\partial \varphi_2}{\partial y} = -\frac{\partial \psi_2}{\partial x} = -\psi_1 \quad \ldots \quad (19)$$

und

$$\Delta \varphi_2 = 0\,; \quad \Delta \psi_2 = 0 \quad \ldots \quad (20);$$

ferner:

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial x^2} &= \frac{\partial^2 \psi_2}{\partial x\,\partial y} = \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} = \varphi\,;\\ \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial x\,\partial y} &= \frac{\partial^2 \psi_2}{\partial y^2} = \frac{\partial \varphi_1}{\partial y} = -\psi\,;\\ \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial y^2} &= -\frac{\partial^2 \psi_2}{\partial x\,\partial y} = -\frac{\partial \psi_1}{\partial y} = -\varphi\end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (21).$$

Kehren wir zu den Gl. (9) zurück. Sie lassen folgende erste Lösung[4]) zu:

$$\left.\begin{aligned}\xi &= -\frac{m+1}{4m}\,y\cdot\psi + \frac{1}{2}\,\varphi_1 + \frac{m+1}{4m}\,\xi',\\ \eta &= -\frac{m+1}{4m}\,y\cdot\varphi + \frac{m-1}{4m}\,\psi_1 + \frac{m+1}{4m}\,\eta'\end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (22),$$

[4]) Siehe Drang und Zwang, l. c.

wobei ξ' und η' die Lösungen der homogenen Gleichungen

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial \xi'}{\partial x}+\frac{\partial \eta'}{\partial y}&=0,\\ \frac{\partial \eta'}{\partial x}-\frac{\partial \xi'}{\partial y}&=0\end{aligned}\right\} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (23)$$

bedeuten. Diese letzten Gleichungen drücken aus, daß

$$\zeta'(z)=\eta'(x,y)+i\,\xi'(x\,y) \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (24)$$

eine komplexe analytische Funktion von $z=x+i\,y$ ist. Mit dieser beliebigen Funktion $\zeta'(z)$ stellen die Gl. (22) die allgemeine Lösung der Gl. (9) dar, wie man sich durch Einsetzen und Ausdifferentiieren leicht überzeugen kann.

Wie schon der Aufbau der Lösung nach Gl. (22) vermuten läßt, ist noch eine andere Darstellung der Lösung möglich. In der Tat lautet diese **zweite Lösung**, wie wir sie nennen wollen, obwohl sie in der ersten bei geeigneter Wahl der Funktionen ξ' und η' mit enthalten sein muß:

$$\left.\begin{aligned}\xi&=-\frac{m+1}{4\,m}\,x\,\varphi+\frac{1}{2}\,\varphi_1+\frac{m+1}{4\,m}\,\xi''\\ \eta&=\frac{m+1}{4\,m}\,x\,\psi+\frac{m-1}{4\,m}\,\psi_1+\frac{m+1}{4\,m}\,\eta''\end{aligned}\right\} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (25),$$

wobei wieder

$$\zeta''=\eta''+i\,\xi'' \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (26)$$

eine komplexe analytische Funktion von z bedeutet.

Durch Einsetzen der Werte ξ und η nach Gl. (25) in die Gl. (9) überzeugt man sich auch wieder von der Richtigkeit dieser Lösung. Aus der Identität der Lösungen nach Gl. (22) und Gl. (25) folgt:

$$\left.\begin{aligned}\xi'''&=\xi'-\xi''=y\,\psi-x\,\varphi\\ \eta'''&=\eta'-\eta''=y\,\varphi+x\,\psi\end{aligned}\right\} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (27)$$

oder

$$\zeta'''(z)=\eta'''+i\,\xi'''=(y\,\varphi+x\,\psi)+i\,(y\,\psi-x\,\varphi)=-\,i\,(x+i\,y)\,(\varphi+i\,\psi)=-\,i\,z\cdot\chi(z) \quad . \quad (28).$$

Neues Lösungsverfahren.

3. Wie schon in der Einleitung erwähnt, verknüpft das neue Lösungsverfahren die beiden oben dargestellten. Wir wollen zu dem Zweck nach dem zweiten Verfahren die Spannungen ausdrücken. Es ist dazu nur nötig, die Werte von ξ und η nach Gl. (22) oder Gl. (25) in die Gl. (6) für die Spannungen einzusetzen. Benützt man die erste Lösung für ξ und η nach Gl. (22), so erhält man die **erste Darstellung für die Spannungen**:

$$\left.\begin{aligned}\sigma_x&=\frac{E}{4}\left(2\,\varphi+y\,\frac{\partial \varphi}{\partial y}+\frac{\partial \xi'}{\partial x}\right);\\ \sigma_y&=\frac{E}{4}\left(-\,y\,\frac{\partial \varphi}{\partial y}-\frac{\partial \xi'}{\partial x}\right);\\ \tau_{xy}&=\frac{E}{4}\left(-\,\psi-y\,\frac{\partial \varphi}{\partial x}+\frac{\partial \xi'}{\partial y}\right)\end{aligned}\right\} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (29).$$

Die **zweite Darstellung für die Spannungen** erhält man durch Einsetzen der zweiten Lösung für ξ und η nach Gl. (25) zu:

$$\left.\begin{aligned}\sigma_x&=\frac{E}{4}\left(\varphi-x\,\frac{\partial \varphi}{\partial x}+\frac{\partial \xi''}{\partial x}\right)\\ \sigma_y&=\frac{E}{4}\left(\varphi+x\,\frac{\partial \varphi}{\partial x}-\frac{\partial \xi''}{\partial x}\right)\\ \tau_{xy}&=\frac{E}{4}\left(-\,x\,\frac{\partial \varphi}{\partial y}+\frac{\partial \xi''}{\partial y}\right)\end{aligned}\right\} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (30).$$

Führt man nun für die Spannungen nach den Gl. (1) die **Airysche** Spannungsfunktion ein, so erhält man mit Benutzung der Beziehungen (16) und (23) zunächst aus den Gl. (29):

$$\left.\begin{aligned}\sigma_x &= \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = \frac{E}{4}\left(\frac{\partial \psi_1}{\partial y} + \frac{\partial (y\varphi)}{\partial y} - \frac{\partial \eta'}{\partial y}\right),\\ \sigma_y &= \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = \frac{E}{4}\left(+\frac{\partial (y\psi)}{\partial x} - \frac{\partial \xi'}{\partial x}\right),\\ \tau_{xy} &= -\frac{\partial^2 F}{\partial x\,\partial y} = \frac{E}{4}\left(-\frac{\partial \psi_1}{\partial x} - \frac{\partial (y\varphi)}{\partial x} + \frac{\partial \eta'}{\partial x}\right)\end{aligned}\right\} \quad \ldots \ldots \quad (31),$$

woraus durch einmalige Integration folgt:

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{E}{4}(y\psi - \xi'); \quad \frac{\partial F}{\partial y} = \frac{E}{4}(\psi_1 + y\varphi - \eta') \quad \ldots \ldots \quad (32).$$

Durch nochmalige Integration unter Berücksichtigung der Beziehungen

$$\zeta_1' = \int \zeta' dz = \eta_1' + i\,\xi_1' \quad \ldots \ldots \quad (33)$$

$$\frac{\partial \eta_1'}{\partial x} = \frac{\partial \xi_1'}{\partial y} = \eta'; \quad \frac{\partial \eta_1'}{\partial y} = -\frac{\partial \xi_1'}{\partial x} = -\xi' \quad \ldots \ldots \quad (34)$$

folgt die Airysche Spannungsfunktion

$$F = \frac{E}{4}(y \cdot \psi_1 - \xi_1') \quad \ldots \ldots \quad (35).$$

Wir stellen demnach als erstes Resultat fest, daß die Airysche Spannungsfunktion und damit jede Lösung der Differentialgleichung $\Delta\Delta F = 0$ sich in der Form der Gl. (35) darstellen läßt, wobei ψ_1 und ξ_1' Potentialfunktionen sind, d. h. den Gleichungen $\Delta\psi_1 = 0$ und $\Delta\xi_1' = 0$ genügen. Der Faktor der ersten Potentialfunktion kann statt y auch x sein, wie leicht einzusehen ist und wovon sogleich noch die Rede sein wird.

Legen wir für die Spannungen die zweite Darstellung nach Gl. (30) zugrunde, so erhält man entsprechend

$$\left.\begin{aligned}\sigma_x &= \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = \frac{E}{4}\left(\frac{\partial \psi_1}{\partial y} - \frac{\partial (x\psi)}{\partial y} - \frac{\partial \eta''}{\partial y}\right)\\ \sigma_y &= \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = \frac{E}{4}\left(\frac{\partial (x\varphi)}{\partial x} - \frac{\partial \xi''}{\partial x}\right)\\ \tau_{xy} &= -\frac{\partial^2 F}{\partial x\,\partial y} = \frac{E}{4}\left(-\frac{\partial (x\varphi)}{\partial y} + \frac{\partial \xi''}{\partial y}\right)\end{aligned}\right\} \quad \ldots \ldots \quad (36),$$

woraus

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{E}{4}(x\varphi - \xi''); \quad \frac{\partial F}{\partial y} = \frac{E}{4}(\psi_1 - x\psi - \eta'') \quad \ldots \ldots \quad (37)$$

folgt.

Führen wir die neue analytische Funktion

$$\zeta_1'' = \int \zeta'' dz = \eta_1'' + i\,\xi_1'' \quad \ldots \ldots \quad (38)$$

ein, so daß gilt

$$\frac{\partial \eta_1''}{\partial x} = \frac{\partial \xi_1''}{\partial y} = \eta''; \quad \frac{\partial \eta_1''}{\partial y} = -\frac{\partial \xi_1''}{\partial x} = -\xi'' \quad \ldots \ldots \quad (39),$$

so erhält man aus den Gl. (37) durch nochmalige Integration die Airysche Spannungsfunktion in der zweiten Darstellung:

$$F = \frac{E}{4}(-\varphi_2 - x\varphi_1 - \xi_1'') \quad \ldots \ldots \quad (40).$$

Zunächst erhält man durch Gleichsetzen der beiden Ausdrücke für die Airysche Spannungsfunktion nach Gl. (35) und Gl. (40) die Identität:

$$\varphi_2 = x\varphi_1 - y\psi_1 - (\xi_1'' - \xi_1') \quad \ldots \ldots \quad (41),$$

worin nach Gl. (27)

$$\xi_1'' - \xi_1' = -\xi_1'''$$

gesetzt werden kann.

einer Spannungsfunktion übernehmen kann. Der Umstand, daß bei derselben Transformation (53) $\Delta\Delta F = 0$ seine äußere Form beim Übergang von der z-Ebene zur z'-Ebene ändert, ist der Grund, daß F in der z'-Ebene keine Spannungsfunktion mehr darstellt und daher auf diesem unmittelbaren Weg eine konforme Abbildung des Spannungszustandes in der z-Ebene auf den Spannungszustand in der z'-Ebene nicht möglich ist.

Für einen harmonischen Spannungszustand läßt sich die Spannungsfunktion noch besonders einfach darstellen. Die Bedeutung der Spannungsfunktion besteht darin, daß man bei Kenntnis dieser Funktion durch partielle Ableitungen nach gewissen Richtungen die zu diesen Richtungen gehörigen Normal- und Schubspannungen an jeder Stelle erhält. Beim biharmonischen Spannungszustand, dessen Spannungsfunktion der Gleichung $\Delta\Delta F = 0$ genügt, erhält man die Spannungen durch die zweiten partiellen Differentialquotienten von F. Beim harmonischen Spannungszustand kann man dagegen aus einer gewissen Funktion schon durch die ersten Differentialquotienten die zugehörigen Spannungen erhalten. Diese Funktion wird man als die zum harmonischen Spannungszustand gehörige Spannungsfunktion bezeichnen. In der Tat ist für den durch Gl. (51) definierten harmonischen Spannungszustand als zugehörige Spannungsfunktion zweckmäßig nicht H zu nehmen, sondern

$$h = \frac{E}{4}\,\varphi_1 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (55);$$

denn daraus folgen durch einmalige Differentiation nach x bzw. y die Spannungen:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial h}{\partial x} &= \frac{E}{4}\frac{\partial \varphi_1}{\partial x} = \frac{E}{4}\,\varphi = (\sigma_x)_H = -(\sigma_y)_H \\ \frac{\partial h}{\partial y} &= \frac{E}{4}\frac{\partial \varphi_1}{\partial y} = -\frac{E}{4}\,\psi = \tau_H \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (56).$$

Wir brauchen also nur die Funktion $\frac{E}{4}\,\chi_1(z)$ konform auf die z'-Ebene abzubilden, um damit die Spannungsfunktion für den entsprechenden harmonischen Spannungszustand in der z'-Ebene zu erhalten. Durch einmalige Differentiation der Funktion $\chi_1(z')$ nach z' erhält man

$$\frac{d\chi_1(z')}{dz'} = \chi(z') = \varphi(x', y') + i\,\psi(x', y')$$

und damit entsprechend den Gl. (51) den harmonischen Spannungszustand in der z'-Ebene, der dem gegebenen harmonischen Spannungszustand der z-Ebene entspricht. Die gesuchte Spannungsfunktion $F(x', y')$ wird dann entsprechend Gl. (44) zu

$$F(x', y') = y' \cdot \Sigma C_i\,\psi_{1i}(x', y') - \Sigma c_i\,\xi'_{1i}(x', y') \quad \ldots\ldots \quad (57)$$

gefunden. Dabei sollen die mit konstanten C_i bzw. c_i behafteten Summenglieder andeuten, daß man nicht unmittelbar $\psi_1(x', y')$ bzw. $\xi_1'(x', y')$ in Gl. (44) nehmen darf, sondern daß man diese beiden Funktionen in ihre einzelnen Kerne ψ_{1i} bzw. ξ_{1i}', aus denen sie sich zusammensetzen, zerlegen muß und diese mit konstanten C_i bzw. c_i multipliziert und addiert in Gl. (57) einsetzen muß. Diese Zerlegung von ψ_1 und ξ_1' in ihre Kerne geschieht zweckmäßig schon in der z-Ebene des gegebenen Spannungszustandes. Die Konstanten C_i bzw. c_i werden aus den Grenzbedingungen in der z'-Ebene ermittelt. Insbesondere erfordern lastfreie Ränder nach Gl. (4), daß längs des Randes

$$\frac{\partial F}{\partial x'} = 0 \quad \text{und} \quad \frac{\partial F}{\partial y'} = 0$$

gelten muß. Die Art der Durchführung im einzelnen geht aus dem folgenden Beispiel hervor.

4. Beispiel: Abbildung des unter Zug stehenden kreisgelochten Bleches auf ein entsprechendes Blech mit elliptischem Loch.

Wir gehen von dem durch Abb. 1 gekennzeichneten Spannungszustand aus:

Ein unendlich ausgedehntes Blech, das ein Kreisloch vom Radius a besitzt und in der Richtung β gegen die x-Achse in weiter Entfernung vom Loch gleichmäßig auf Zug von der Stärke p beansprucht wird. Dieser Spannungszustand ist bekannt. Wir gehen von ihm aus und wollen durch Anwendung der konformen Abbildung auf Grund vorstehender Theorie

Abb. 1.

daraus den Spannungszustand in einem Blech mit elliptischem Loch ableiten, wobei auch wieder der gleichmäßige Zug p im Unendlichen den Winkel β mit einer Achse der Ellipse einschließen soll.

Die Spannungsfunktion für das kreisgelochte Blech lautet unter Zugrundelegung der durch Abb. 1 gegebenen Koordinaten[5])

$$F = \frac{p}{4}\left[r^2 - 2a^2 \lg r - \frac{(r^2 - a^2)^2}{r^2}\cos 2(\alpha - \beta)\right] \quad \text{. . . . . (58).}$$

Daraus folgen die Spannungen:

$$\left.\begin{aligned}
\sigma_r &= \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 F}{\partial \alpha^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial F}{\partial r} = \frac{p}{2}\left[1 - \frac{a^2}{r^2} + \left(1 - \frac{4a^2}{r^2} + \frac{3a^4}{r^4}\right)\cos 2(\alpha - \beta)\right], \\
\sigma_t &= \frac{\partial^2 F}{\partial r^2} = \frac{p}{2}\left[1 + \frac{a^2}{r^2} - \left(1 + \frac{3a^4}{r^4}\right)\cos 2(\alpha - \beta)\right], \\
\tau &= -\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial F}{\partial \alpha}\right) = \frac{p}{2}\left[-1 - \frac{2a^2}{r^2} + \frac{3a^4}{r^4}\right]\sin 2(\alpha - \beta)
\end{aligned}\right\} \quad \text{. . . (59).}$$

Die gegebene Spannungsfunktion F ist nun in die Form von Gl. (44) umzuschreiben. Zu dem Zwecke betrachten wir zunächst den ersten Anteil:

$$f = \frac{p}{4} r^2 = \frac{p}{4}(x^2 + y^2) \quad \text{. . . . . (60).}$$

Der zugehörige Spannungszustand ist ein homogener, aber kein harmonischer:

$$(\sigma_x)_0 = (\sigma_y)_0 = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{p}{2} \quad \text{und} \quad \tau_0 = 0 \quad \text{. . . . . (61),}$$

d. h. es herrscht überall für jede Schnittrichtung der gleiche Zug von der Stärke $\frac{p}{2}$. Die Spannungsfunktion f läßt sich folgendermaßen in Form der Gl. (44) umschreiben:

$$f = \frac{p}{4}\cdot(x^2 + y^2) = \frac{p}{4}[y(\psi_1)_0 - (\xi_1')_0] \quad \text{. . . . . (62),}$$

wobei

$$\left.\begin{aligned}
(\psi_1)_0 &= 2y \quad \text{und} \\
(\xi_1')_0 &= (y^2 - x^2)
\end{aligned}\right\} \quad \text{. (63)}$$

ist; $(\xi_1')_0$ ist der imaginäre Anteil der komplexen Funktion

$$(\zeta_1')_0 = (\eta_1')_0 + i(\xi_1')_0 = -iz^2 \quad \text{. . . . . (64).}$$

Die übrigen Summanden in dem Ausdruck F für die Spannungsfunktion nach Gl. (58) lassen sich noch einfacher behandeln, so daß man F folgendermaßen in Form von Gl. (44) wiedergeben kann:

$$F = \frac{E}{4}(y\cdot\psi_1 - \xi_1') \quad \text{. . . . . (65)}$$

wobei

$$\psi_1 = \frac{2p}{E}\left(y - 2\frac{a^2}{r}\sin(\alpha - \beta)\right) \quad \text{. . . . . (66)}$$

und

$$\xi_1' = \frac{p}{E}\left(y^2 - x^2 + 2a^2 \lg r + r^2\cos 2(\alpha - \beta) + \frac{a^4}{r^2}\cos 2(\alpha - \beta)\right) \quad \text{. (67).}$$

Es ist ferner:

$$\chi_1 = \varphi_1 + i\psi_1 = \frac{2p}{E}\left[z + \frac{2a^2}{z}e^{i\beta}\right] \quad \text{. . . . . (68),}$$

woraus

$$\chi = \varphi + i\psi = \frac{2p}{E}\left[1 - \frac{2a^2}{z^2}e^{i\beta}\right] \quad \text{. . . . . (69)}$$

folgt; weiter gilt

$$\zeta_1' = \eta_1' + i\xi_1' = i\frac{p}{E}\left[2a^2 \lg z + \frac{a^4}{z^2}e^{2i\beta} + z^2(e^{-2i\beta} - 1)\right] \quad \text{. . . (70),}$$

[5]) Siehe Drang und Zwang, 1. Bd. 2. Aufl. S. 315.

woraus

$$\zeta' = \eta' + i\,\xi' = i\,\frac{2p}{E}\left[\frac{a^2}{z} - \frac{a^4}{z^3}e^{2i\beta} + z\,(e^{-2i\beta} - 1)\right] \quad \ldots\ldots (71)$$

folgt.

Damit ist der gegebene Spannungszustand in einer Form dargestellt, wie er für die Abbildung brauchbar ist. Wir stellen fest, daß ψ_1 aus zwei Kernen und ξ_1' aus vier Kernen bestehen, die wir gleich jetzt mit zunächst unbestimmten Konstanten C_i bzw. c_i multipliziert hervorheben wollen, um sie nach der konformen Abbildung in Gl. (57) einzusetzen. Wir setzen demnach an Stelle von ψ_1:

$$\Sigma\, C_i\,\psi_{1i} = C_1\, y + C_2\,\frac{1}{r}\sin(\alpha - \beta) \quad \ldots\ldots (72)$$

und an Stelle von ξ_1':

$$\Sigma\, c_i\,\xi'_{1i} = c_1\,(y^2 - x^2) + c_2 \lg r + c_3\, r^2 \cos 2\,(\alpha - \beta) + c_4\,\frac{1}{r^2}\cos 2\,(\alpha - \beta) \quad (73).$$

Wir gehen nun zur konformen Abbildung über. Sie wird durch die Funktion

$$z' = \frac{C}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right) \quad \ldots\ldots (74)$$

vermittelt. Hierdurch werden die Kreise um den Nullpunkt der z-Ebene in Ellipsen der z'-Ebene und die Geraden durch den Nullpunkt der z-Ebene in Hyperbeln der z'-Ebene, die auf den Ellipsen senkrecht stehen, übergeführt. Man sieht diese Zuordnung besonders deutlich, wenn man in der z-Ebene eine Hilfsvariable $w = u + i\,v$ durch die Beziehung

$$z = x + i\,y = e^w = e^{u + i\,v} \quad \ldots\ldots (75)$$

einführt. Damit kann man für Gl. (74) setzen

$$z' = C\,\mathfrak{Cof}\,w \quad \ldots\ldots (76).$$

Wegen Gl. (75), die man auch schreiben kann

$$\lg z = \lg r + i\,\alpha = w = (u + i\,v),$$

folgt

$$\left.\begin{array}{l}\lg r = u \text{ oder } r = e^u \\ \alpha = v\end{array}\right\} \quad \ldots\ldots (77).$$

so daß die Kreise $r = \text{const}$ der z-Ebene den Werten $u = \text{const}$ und die Geraden $\alpha = \text{const}$ den Werten $v = \text{const}$ entsprechen.

In der z-Ebene kann man aus Gl. (76), die sich folgendermaßen schreiben läßt:

$$z' = C\,\mathfrak{Cof}\,w = C\,\mathfrak{Cof}\,(u + i\,v) = C\,\mathfrak{Cof}\,u \cos v + i\,C\,\mathfrak{Sin}\,u \sin v,$$

oder

$$\left.\begin{array}{l}x' = C\,\mathfrak{Cof}\,u \cos v \\ y' = C\,\mathfrak{Sin}\,u \sin v\end{array}\right\} \quad \ldots\ldots (78)$$

entnehmen, daß die Kurven $u = \text{const}$ den Ellipsen

$$\frac{x'^2}{C^2\,\mathfrak{Cof}^2 u} + \frac{y'^2}{C^2\,\mathfrak{Sin}^2 u} = 1 \quad \ldots\ldots (79)$$

und $v = \text{const}$ den Hyperbeln

$$\frac{x'^2}{C^2 \cos^2 v} - \frac{y'^2}{C^2 \sin^2 v} = 1 \quad \ldots\ldots (80)$$

entsprechen.

Der Kreis $r = a$ der z-Ebene entspreche dem Wert u_0, so daß

$$u_0 = \lg\frac{a}{b} \quad \ldots\ldots (81),$$

wobei b eine später geeignet zu wählende Konstante bedeutet. Dem Kreis $r = a$ der z-Ebene entspricht die Ellipse

$$\frac{x'^2}{C^2\,\mathfrak{Cof}^2 u_0} + \frac{y'^2}{C^2\,\mathfrak{Sin}^2 u_0} = 1$$

der z'-Ebene, so daß die Halbachsen A und B des elliptischen Loches in der z'-Ebene durch

$$\left.\begin{aligned} A^2 &= C^2 \operatorname{Cof}^2 u_0 \\ B^2 &= C^2 \operatorname{Sin}^2 u_0 \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots (82)$$

gegeben sind. Aus den letzten Gleichungen folgt

und

$$\left.\begin{aligned} C^2 &= A^2 - B^2 \\ \operatorname{Tg} u_0 &= \frac{B}{A} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots (83),$$

woraus bei gegebenen Halbachsen A und B des elliptischen Loches die Werte C und u_0 folgen. Aus Gl. (81) erhält man dann die konstante Größe b, da der Radius a des Kreisloches in der z-Ebene bekannt ist.

Durch Einsetzen der Hilfsvariablen $w = u + i v$ in Gl. (72) bzw. Gl. (73) erhält man

$$\Sigma C_i \psi_{1\,i} = C_1 \cdot e^u \sin v + C_2 e^{-u} \sin(v - \beta) \quad \ldots\ldots (84)$$

bzw.

$$\Sigma c_i \xi'_{1\,i} = -c_1 e^{2u} \cos 2v + c_2 u + c_3 e^{2u} \cos 2(v-\beta) + c_4 e^{-2u} \cos 2(v-\beta) \quad (85)$$

und damit die Spannungsfunktion nach Gl. (57)

$$\left.\begin{aligned} F(x', y') = \operatorname{Sin} u \sin v\,(C_1 e^u \sin v + C_2 e^{-u} \sin(v - \beta) \\ + c_1 e^{2u} \cos 2v - c_2 u - c_3 e^{2u} \cos 2(v-\beta) - c_4 e^{-2u} \cos 2(v-\beta) \end{aligned}\right\} (86).$$

Die sechs Konstanten C_1, C_2, c_1, c_2, c_3 und c_4 ergeben sich aus den Randbedingungen in der z'-Ebene. Da die Ellipse $u = u_0$ lastfrei sein soll, so müssen längs dieses Randes die ersten Ableitungen der Spannungsfunktion F verschwinden; d. h. es muß gelten:

$$\left(\frac{\partial F}{\partial u}\right)_{u = u_0} = 0 \quad \text{und} \quad \left(\frac{\partial F}{\partial v}\right)_{u = u_0} = 0 \quad \ldots\ldots (87),$$

und zwar müssen diese Beziehungen identisch in v gelten.

Um die weitere Rechnung zu vereinfachen, nehmen wir an, daß der Winkel $\beta = 0$ sein soll, so daß der Zug in Richtung der x-Achse und damit auch in Richtung der x'-Achse, d. h. einer Hauptachse der Ellipse erfolgen soll. Wäre β von Null verschieden, so würde dies keine wesentliche Erschwerung der Aufgabe bedeuten, sondern nur eine etwas längere Rechenarbeit, die man sich hier aber ersparen kann, nachdem das Resultat schon bekannt ist und das Beispiel nur dazu dienen soll, die allgemeine Theorie zu erläutern.

Mit $\beta = 0$ fallen, wie aus Gl. (67) und (73) hervorgeht, wegen $y^2 - x^2 = -r^2 \cos 2a$ die mit c_1 und c_3 behafteten Glieder gegenseitig weg und Gl. (86) geht über in

$$F = \operatorname{Sin} u \cdot \sin^2 v\,(C_1 e^u + C_2 e^{-u}) - C_3 u - C_4 e^{-2u} \cos 2v \quad \ldots\ldots (88).$$

Bildet man nun

$$\left(\frac{\partial F}{\partial u}\right)_{u_0} = 0 \quad \text{und} \quad \left(\frac{\partial F}{\partial v}\right)_{u_0} = 0$$

identisch in v, so erhält man nach leichter Umrechnung

$$\left.\begin{aligned} C_2 &= -C_1 (3 \operatorname{Sin} u_0 + \operatorname{Cof} u_0)\, e^{u_0} \\ C_3 &= 2\, C_1 \operatorname{Sin}^2 u_0 \\ C_4 &= C_1 \operatorname{Sin}^2 u_0 \cdot e^{2 u_0} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots (89),$$

so daß sich die Spannungsfunktion ergibt zu

$$\left.\begin{aligned} F = C_1 [\operatorname{Sin} u\, e^u \sin^2 v - (3 \operatorname{Sin} u_0 + \operatorname{Cof} u_0) e^{(u_0 - u)} \operatorname{Sin} u \cdot \sin^2 v - 2 \operatorname{Sin}^2 u_0 \cdot u \\ - \operatorname{Sin}^2 u_0 \cdot e^{2(u_0 - u)} \cos 2v) \end{aligned}\right\} \quad \ldots (90).$$

woraus durch einfache Umformung die folgende Form gewonnen werden kann:

$$F = \frac{C_1}{2} [\operatorname{Sin} 2u + e^{-2(u - u_0)} - 2u \cdot (\operatorname{Cof} 2u_0 - 1) - (\operatorname{Cof} 2(u - u_0) - 1) e^{2u_0} \cos 2v] \quad . (91),$$

in Übereinstimmung mit der auf anderem Weg gefundenen Lösung[6]). Daß die Spannungsfunktion im Unendlichen zu einem Zug in der x'-Richtung gehört, geht aus der Form von Gl. (90) hervor. Für sehr große Werte von u bleibt nur das erste Glied stehen:

$$F_0 = C_1 \cdot \frac{e^{2u}}{2} \sin^2 v \quad \ldots\ldots (92).$$

[6]) Siehe Karl Wolf, „Beiträge zur ebenen Elastizitätstheorie", Zeitschr. f. techn. Physik 1921, S. 209 und 1922, S. 160; ferner Th. Pöschl, Über eine partikuläre Lösung des biharmonischen Problems für den Außenraum der Ellipse", Mathem. Zeitschrift, Bd. 11, 1921, S. 89.

Ist p der auf die Längeneinheit treffende Zug, so ist wegen

$$F_0 = p\,\frac{r^2}{2}\sin^2 v \qquad \text{und} \qquad r = C\cdot\frac{e^u}{2}$$

die Konstante

$$C_1 = p\,\frac{C^2}{4}$$

oder wegen Gl. (83)

$$C_1 = \frac{A^2 - B^2}{4}\,p \quad \ldots\ldots\ldots \quad (93).$$

Damit ist die gestellte Aufgabe gelöst. Vergleicht man den neuen Weg der Lösung mit dem früheren, so springt der Vorteil der neuen Theorie sofort in die Augen.

Es ist damit ein neuer Weg zur Lösung von ebenen Spannungsaufgaben angegeben, auf dem, wie ich bestimmt annehme, noch reiche Früchte zu erwarten sind. 133

Über die Anzahl der Knotenpunkte bei erzwungenen und freien Stabschwingungen.

Von *K. Hohenemser* und *W. Prager*, Göttingen.

Bei der Berechnung der höheren Eigenschwingungszahlen von transversal schwingenden Stäben mit über die Länge veränderlichem Querschnitt und beliebiger Massenverteilung ist es zweckmäßig, an dem Stab zusätzliche Lager anzubringen derart, daß die Grundschwingung des so veränderten Systems identisch wird mit der gesuchten Oberschwingung des ursprünglichen Systems[1]). Dies wird offensichtlich dann der Fall sein, wenn man die zusätzlichen Lager in allen denjenigen Stellen anbringt, in denen die betreffende Oberschwingung Knotenpunkte besitzt. In diesem Zusammenhang interessiert die Frage, ob es möglich ist, jede Eigenschwingungsform eines Stabes durch die Anzahl der Knotenpunkte eindeutig zu charakterisieren.

In der vorliegenden Arbeit soll der folgende Satz bewiesen werden: Ordnet man die Eigenschwingungen eines in stabiler Weise mit Hilfe von beliebig vielen festen Stützen, festen oder elastischen Einspannungen gelagerten Stabes nach steigenden Schwingungszahlen, so besitzt die n-te Oberschwingungsform genau n Knotenpunkte.

Der entsprechende Satz für das Sturm-Liouvillesche Eigenwertproblem (Transversalschwingungen einer Saite, Longitudinal- und Torsionsschwingungen eines Stabes) wird gewöhnlich durch eine Kontinuitätsbetrachtung bewiesen[2]), die sich jedoch nicht ohne weiteres auf das Oszillationsproblem der Differentialgleichung vierter Ordnung

$$(p\,y'')'' - \lambda\varrho\,y = 0$$

(Transversalschwingungen eines Stabes) übertragen läßt[3]). Bei mehrfach gelagerten Stäben tritt hierzu noch die Schwierigkeit, daß außer den Randbedingungen noch Übergangsbedingungen an den Zwischenlagern zu erfüllen sind. In der vorliegenden Arbeit werden diese Schwierigkeiten dadurch umgangen, daß die Differentialgleichung der Stabschwingungen nur zur Herleitung von gewissen allgemeinen Sätzen über Monotonieeigenschaften der Lösung herangezogen wird, während der eigentliche Beweis von der Integralgleichung der Stabschwingungen ausgeht.

Der Gedankengang ist dabei folgender:

Man verzichtet an einem Endlager des Stabes auf die Erfüllung der Randbedingung $y = 0$ und bringt statt dessen eine periodische Kraft an, deren Frequenz von null an stetig gesteigert werden soll. Die Betrachtung der Integralgleichung für die erzwungenen Schwingungen des so veränderten Systems lehrt dann, daß unter allen erzwungenen Schwingungsformen, die man so erhält, nicht nur die Eigenschwingungsformen des veränderten, sondern auch die des ursprünglichen Systems enthalten sind. Wenn ein Ende des Stabes schon ursprünglich frei ist, so kann man dort ohne weiteres die periodische Kraft anbringen. Auch in diesem Falle lassen sich die Eigenfunktionen in das Kontinuum der Schwingungsformen für die erzwungenen Schwingungen einordnen.

[1]) K. Hohenemser, Ingenieurarchiv 1 (1930), S. 284.

[2]) Vgl. z. B. Courant-Hilbert, Meth. d. math. Phys. I, S. 366.

[3]) Vgl. hierzu Davidoglou, Ann. sc. de l'éc. norm. sup. 22 (1905), S. 339, wo der oben angeführte Satz für den beiderseits eingespannten Stab bewiesen wird.

Bei einem stabil gelagerten elastischen Stab gilt für die Auslenkung (Verdrehung) $y(x)$ infolge der Kräfte (Drehmomente) $p(x)$ je Längeneinheit die Beziehung:

$$y(x) = \int_0^l K(x, \xi)\, p(\xi)\, d\xi.$$

Die Einflußfunktion $K(x, \xi)$ stellt die Auslenkung (Verdrehung) im Punkte x infolge einer Kraft (Drehmoment) eins im Punkte ξ dar, sie ist symmetrisch, d. h. es ist

$$K(x, \xi) = K(\xi, x).$$

Im Falle einer erzwungenen Schwingung ist der Stab mit Massenkräften und äußeren periodischen Kräften $q(\xi) \cdot \sin \sqrt{\lambda}\, t$ je Längeneinheit belastet, es ist also:

$$p(\xi) = \lambda\, m(\xi)\, y(\xi) + q(\xi).$$

Hierbei ist $m(\xi)$ die auf die Längeneinheit bezogene Masse des Stabes an der Stelle ξ und $\sqrt{\lambda}$ die Frequenz der erregenden Kräfte. Man erhält durch Eintragen dieser Belastung in die Beziehung für die Auslenkung:

$$y(x) = \lambda \int_0^l K(x, \xi)\, m(\xi)\, y(\xi)\, d\xi + f(x) \quad \text{. . . . . (1)},$$

worin

$$\int_0^l q(\xi)\, K(x, \xi)\, d\xi = f(x)$$

gesetzt ist. Integriert man über die Massenelemente statt über die Längenelemente und bezeichnet das neue Argument mit s bzw. t, so ergibt sich:

$$y(s) = \lambda \int_0^M K(s, t)\, y(t)\, dt + f(s)\,.$$

Die Lösung dieser inhomogenen Integralgleichung zweiter Art mit symmetrischem Kern wird bekanntlich[4]) dargestellt durch

$$y(s, \lambda) = f(s) + \lambda \sum_{i=1}^{\infty} \frac{f_i}{\lambda_i - \lambda} \cdot y_i(s) \quad \text{. . . . . (2)},$$

worin die $y_i(s)$ die Lösungen sind der homogenen Integralgleichung

$$y(s) = \lambda \int_0^M K(s, t)\, y(t)\, dt\,.$$

Die Entwicklungskoeffizienten ergeben sich aus

$$f_i = \int_0^M f(s)\, y_i(s)\, ds\,,$$

die λ_i sind die Eigenwerte der homogenen Integralgleichung, die alle positiv sind. Die Entwicklung (2) konvergiert für alle λ gleichmäßig und absolut. Wir bilden zunächst formal die Ableitung von (2) nach λ:

$$\frac{\partial}{\partial \lambda} y(s, \lambda) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{f_i\, \lambda_i}{(\lambda_i - \lambda)^2}\, y_i(s) \quad \text{. . . . . (3)}.$$

Wegen

$$\lim_{i \to \infty} \lambda_i = \infty$$

gibt es für jedes endliche λ eine positive Zahl k, so daß für alle $i > k$ gilt

$$|\lambda_i - \lambda| > \frac{\lambda_i}{m}\,,$$

wo m irgend eine positive endliche Zahl größer als eins ist. Es gilt daher

$$m^2 \sum_{i=k}^{\infty} \frac{|f_i|\,|y_i|}{\lambda_i} > \sum_{i=k}^{\infty} \frac{|f_i|\, \lambda_i}{(\lambda_i - \lambda)^2}\, |y_i|\,.$$

---

[4]) Vgl. z. B. Courant-Hilbert, I, S. 119.

Die Reihe der linken Seite konvergiert nach einem bekannten Theorem von Hilbert[5]) gleichmäßig, womit gezeigt ist, daß auch die Entwicklung (3) gleichmäßig und absolut konvergiert. Durch Einsetzen überzeugt man sich überdies leicht, daß (3) auch der nach λ differenzierten inhomogenen Integralgleichung genügt. Die Entwicklung (3) stellt also tatsächlich die Ableitung von $y(s,\lambda)$ nach λ dar.

Wir spezialisieren unsere Beziehungen nun für den Fall, daß lediglich im Punkte $s=0$ eine äußere periodische Kraft $Q \cdot \sin t\sqrt{\lambda}$ angreift. Dann ist

$$f(s) = Q \cdot K(s,0)$$

und

$$f_i = Q\int_0^M K(s,0)\, y_i(s)\, ds = Q\frac{y_i(0)}{\lambda_i}.$$

Die Gl. (2) vereinfacht sich zu

$$y(s,\lambda) = Q\left\{K(s,0) + \lambda\sum_{i=1}^{\infty}\frac{y_i(0)\, y_i(s)}{(\lambda_i - \lambda)\,\lambda_i}\right\} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (2')$$

und die Gl. (3) geht über in

$$\frac{\partial}{\partial\lambda} y(s,\lambda) = Q\sum_{i=1}^{\infty}\frac{y_i(0)\, y_i(s)}{(\lambda_i - \lambda)^2} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (3').$$

Insbesondere gilt an der Stelle $s=0$:

$$y(0,\lambda) = Q\left\{K(0,0) + \lambda\sum_{i=1}^{\infty}\frac{y_i^2(0)}{(\lambda_i - \lambda)\,\lambda_i}\right\} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (2'')$$

$$\frac{\partial}{\partial\lambda} y(0,\lambda) = Q\sum_{i=1}^{\infty}\frac{y_i^2(0)}{(\lambda_i - \lambda)^2} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (3'').$$

Zunächst diskutieren wir die Eigenschaften der Funktion $y(0,\lambda)$ unter der Annahme, daß mehrfache Eigenwerte ausgeschlossen sind. Kommt λ in die Nähe eines Eigenwertes λ_k, dann überwiegt in der Reihe für $y(0,\lambda)$ das Glied mit λ_k, so daß man für genügend kleine $|\lambda_k - \lambda|$ schreiben kann

$$y(0,\lambda) = Q\frac{\lambda}{\lambda_k(\lambda_k - \lambda)} y_k^2(0).$$

Die Funktion $y(0,\lambda)$ springt also an der Stelle $\lambda = \lambda_k$ von $+\infty$ auf $-\infty$. Wegen (3'') hat $y(0,\lambda)$ immer eine positive Ableitung nach λ, wächst also von $-\infty$ an der Stelle $\lambda_k + 0$ monoton bis zu $+\infty$ an der Stelle $\lambda_{k+1} - 0$. Da der Kern $K(s,t)$ positiv definit ist, muß $K(0,0)$ positiv sein, $y(0,\lambda)$ verläuft also ausgehend von $y(0,0) = Q \cdot K(0,0)$ wie in Abb. 1 angedeutet.

Wir sind jetzt in der Lage, die Knotenpunktsätze für die verschiedenen Schwingungsarten zu beweisen, wenn wir noch von gewissen Monotonieeigenschaften der Lösungen der Schwingungsdifferentialgleichung Gebrauch machen.

Wir erläutern die Methode zunächst an der Differentialgleichung

$$(p\,y')' + \lambda\,\varrho\,y = 0 \quad \ldots \ldots \ldots \quad (4),$$

wo p und ϱ im ganzen in Frage kommenden Gebiet als positiv angenommen werden sollen. Um die Vorstellungen festzulegen, wollen wir Torsionsschwingungen von Stäben betrachten, für Longitudinalschwingungen von Stäben und Transversalschwingungen von Saiten gilt die gleiche Differentialgleichung mit entsprechenden Randbedingungen, so daß unsere Betrachtungen auch für diese Fälle zutreffen.

Ist in einem Punkte $x = x_0$ $y = y' = 0$, dann hat (4) nur eine überall identisch verschwindende Lösung. Ist in diesem Punkte $y = 0$, $y' > 0$, dann wächst y monoton für $x > x_0$, ist schließlich im Punkte x_0 $y = 0$, $y' < 0$, so nimmt y monoton ab für $x > x_0$. Wir betrachten nun einen Stab der an zwei Punkten gegen Verdrehung festgehalten ist. Die Eigenschwingungen dieses Stabes betten wir in das Kontinuum der erzwungenen Schwingungsformen ein, die entstehen, wenn man das Lager bei $x=0$ entfernt und dort ein periodisches Moment $Q \cdot \sin t\sqrt{\lambda}$ anbringt, dessen Frequenz von null an stetig wächst. Die Eigenschwin-

[5]) Vgl. z. B. Courant-Hilbert, I, S. 418.

gungszahlen des fest-freien Stabes seien $\lambda_1, \lambda_2 \ldots$, die des fest-festen Stabes $\lambda_1', \lambda_2' \ldots$. Aus dem durch Abb. 1 dargestellten Verhalten von $y(0, \lambda)$ geht hervor, daß immer zwischen zwei Werten $\lambda = \lambda_i$ und $\lambda = \lambda_{i+1}$ eine Nullstelle von $y(0, \lambda)$ liegt, zum ersten Male zwischen λ_1 und λ_2. Die λ-Werte, die diesen Nullstellen entsprechen, müssen gleich sein den Eigenwerten λ_i' des fest-festen Stabes, denn für diese geht die Lösung des erzwungenen wie des freien Problemes aus der gleichen Differentialgleichung mit den gleichen Randbedingungen hervor. Man erhält mit wachsendem λ die in Abb. 2 angedeuteten Schwingungsformen. Während $y(0, \lambda)$ durch null geht, muß $y' < 0$ sein, da andernfalls y für positive x monoton zunehmen müßte, so daß es für $x = l$ nicht verschwinden könnte. Übrigens ist hier $y'(0, \lambda)$ für alle λ konstant und negativ wegen der Randbedingung $p\,y' + Q = 0$. Man erkennt, daß jedesmal, wenn $y(0, \lambda)$ durch null geht, ein Knoten von $y(x, \lambda)$ hereinwandert. Außer auf die beschriebene Weise können aber keine Knoten von $y(x, \lambda)$ entstehen und auch keine einmal entstandenen Knoten verschwinden oder bei $x = l$ wieder herauswandern. Nach Gl. (2′) ändert sich nämlich $y(x, \lambda)$ stetig mit λ, abgesehen von den Werten λ_i, wo jedoch lediglich in allen Punkten x das Vorzeichen von $y(x, \lambda)$ umgekehrt wird. Knotenpunkte könnten also nur dann verschwinden oder auf andere Weise als oben gezeigt entstehen, wenn ein Schwingungsbauch nach Art der Abb. 3 durch die Nullinie hindurchtritt. Dann müßte aber für ein

Abb. 1.

Abb. 2.

Abb. 3.

bestimmtes λ und x $y(x, \lambda) = y'(x, \lambda) = 0$ sein, also $y(x, \lambda) \equiv 0$ für beliebiges x, woraus nach Gl. (2″) $Q \cdot K(0,0) = 0$ folgen würde, was im Widerspruch zu der Existenz der erregenden Kraft steht. Da für $\lambda = 0$ die Funktion $y(x, 0) = Q \cdot K(x, 0)$ keine Nullstellen besitzt, ist für die Torsionsschwingungen des fest-festen Stabes tatsächlich gezeigt, daß die n-te Oberschwingung gerade n Knoten besitzt, wenn man die Endlager nicht mitrechnet. Da die Eigenschwingungsformen des fest-freien Stabes mit denjenigen der erzwungenen Schwingung für $\lambda = \lambda_i' - 0$ bzw. $\lambda = \lambda_i' + 0$ übereinstimmen, ist der Knotenpunktsatz gleichzeitig auch für den fest-freien Stab bewiesen. Der mehrfach gelagerte Stab stellt für Torsionsschwingungen kein besonderes Problem dar, da über die Lager hinweg keine Drehmomente übertragen werden, so daß jeder Stababschnitt zwischen zwei Lagern unabhängig von den übrigen schwingt.

Für die transversalen Schwingungen eines Stabes, der mit Hilfe von beliebig vielen festen Stützen, festen oder elastischen Einspannungen stabil gelagert ist, lassen sich die Knotenpunktsätze mit genau der gleichen Methode mühelos beweisen, während die übliche Kontinuitätsbetrachtung infolge der Übergangsbedingungen unübersichtlich und schwer durchführbar wird.

Wie man sich leicht überzeugt, gelten für die Lösungen der Differentialgleichung

$$(p\,y'')'' - \lambda\,\varrho\,y = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (5)$$

bei positiven p und ϱ die folgenden Monotoniesätze:

1. Ist von den vier Größen y, y', $p\,y''$, $(p\,y'')'$ an einer bestimmten Stelle $x = x_0$ lediglich eine von null verschieden, so verhalten sich diese vier Funktionen sowohl für $x > x_0$ wie für $x < x_0$ monoton.

2. Sind von den zyklisch angeordnet zu denkenden Größen y, y', $p\,y''$, $(p\,y'')'$ an einer bestimmten Stelle $x = x_0$ lediglich zwei aufeinanderfolgende von null verschieden, so verhalten sich diese vier Funktionen monoton für $x > x_0$, wenn die beiden in x_0 nicht verschwindenden Größen gleiches Vorzeichen, dagegen monoton für $x < x_0$, wenn dieselben verschiedenes Vorzeichen haben.

3. Sind von den zyklisch angeordnet zu denkenden Größen $y, y', p y'', (p y'')'$ für eine bestimmte Stelle $x = x_0$ lediglich zwei nicht aufeinanderfolgende von null verschieden, so verhalten sich diese vier Funktionen monoton sowohl für $x > x_0$ wie für $x < x_0$, wenn die beiden in x_0 nicht verschwindenden Größen gleiches Vorzeichen haben.

Aus Satz 2 folgt weiter:

4. Verschwindet in zwei Punkten $x = a$ und $x = b$, $(a < b)$ irgendeine der vier Größen $y, y', p y'', (p y'')'$ und ist außerdem in einem Punkte x_0 des Intervalls $a < x < b$ $y = y' = 0$, so muß entweder im Teilintervall $a < x < x_0$ oder im Teilintervall $x_0 < x < b$ $y(x) \equiv 0$ gelten.

Wir betrachten einen Stab nach Abb. 4, er ist bei $x = 0$ frei drehbar und an beliebig vielen anderen Punkten frei drehbar, oder mit elastischer Einspannung gelagert. Wir setzen zunächst voraus, daß die Lagerung auch nach Beseitigung der Stütze bei $x = 0$ stabil ist, um eine endliche Einflußfunktion zu erhalten. An den Zwischenstützen soll der Einspannungsgrad nicht unendlich werden, da sonst der Stab in getrennt schwingende Teilsysteme zerfällt. Strenge Punktmassen und Gelenke seien nicht vorhanden, doch kann man beliebig große lokale Massenkonzentrationen und beliebig große lokale Steifigkeitsverminderungen zulassen, ohne daß dadurch die Stetigkeit der Lösungen der Differentialgleichung (5) und ihrer Differentialquotienten aufgehoben wird.

Abb. 4.

Abb. 5.

Abb. 6.

Abb. 7.

Wir bringen wieder bei $x = 0$ eine periodische Kraft $Q \cdot \sin t\sqrt{\lambda}$ an und verzichten auf Erfüllung der Randbedingung $y(0) = 0$. Das Koordinatensystem sei wie in Abb. 4 gezeichnet angenommen, Q habe die Richtung der positiven y-Achse. Für das Verhalten von $y(0, \lambda)$ bei wachsendem λ ist wieder Abb. 1 maßgebend. Während $y(0, \lambda)$ durch null geht, gelten für das Ende $x = 0$ die Beziehungen $y = 0$, $y'' = 0$. Nun ist aber die Querkraft bei $x = 0$ negativ, also $(p y'')' > 0$. Wenn für $x = 0$ auch noch $y' > 0$ wäre, so würde nach Satz 3 Monotonität von y für alle x folgen, was wegen der rechts von $x = 0$ vorausgesetzten Lager unmöglich ist. Also muß $y'(0) < 0$ sein. Man erhält demnach bei wachsendem λ die Formen der Abb. 4. Man sieht, daß auch hier jedesmal ein Knoten von $y(x, \lambda)$ von links hereinwandert, wenn $y(0, \lambda)$ durch null geht.

Innerhalb eines Feldes zwischen zwei Stützen oder zwischen einer Stütze und einem freien Ende kann die Schwingungsform die x-Achse nicht berühren, denn nach Satz 4 müßte in diesem Falle in einem Teile des Feldes $y(x) \equiv 0$ sein. Aus Gl. (2') folgt dann aber identisches Verschwinden von $K(0, x)$ in dem betreffenden Teile, was nur dann möglich ist, wenn unseren Voraussetzungen entgegen zwischen $x = 0$ und dem betreffenden Feld eine feste Einspannung liegt. Aus der Unmöglichkeit einer Berührungsstelle innerhalb eines Feldes kann man schließen, daß die Anzahl der Knoten nicht durch eine Veränderung der Schwingungsform nach Art der Abb. 5 vermehrt oder vermindert werden kann. An den Lagern selbst kann wohl eine Berührungsstelle auftreten, und zwar ist das dann der Fall, wenn bei wachsendem λ ein Knoten über das Lager hinwegwandert, wie in Abb. 6 angedeutet. Andererseits kann aber auch kein Knoten am rechten Endlager hinauswandern, da dann für ein bestimmtes λ an diesem Lager $y = y' = y'' = 0$ wird, unabhängig davon, ob der Stab hier frei drehbar oder fest elastisch

eingespannt ist. Nach Satz 3 folgt aber aus dem Verschwinden dieser drei Größen Monotonität von $y, y', py'', (py'')'$, was wegen der Bedingungen am vorletzten Lager zu $y(x) \equiv 0$ führt. Wäre das rechte Ende des Stabes frei, so würden beim Herauswandern eines Knotens dort y, py'' und $(py'')'$ verschwinden, woraus der gleiche Schluß gezogen werden könnte.

Damit ist gezeigt, daß bei wachsendem λ Knoten nur dadurch entstehen können, daß sie bei $x = 0$ von links hereinwandern und daß keiner der einmal vorhandenen Knoten dem System verlorengehen kann. Für $\lambda = 0$ hat die Funktion $y(x, 0)$ innerhalb der Felder keine Nullstellen und ist in benachbarten Feldern von verschiedenem Vorzeichen, wie man mit Hilfe der statischen Theorie durchlaufender Träger nachweisen kann. Aus dem Charakter der in Abb. 1 dargestellten Funktion $y(0, \lambda)$ folgt nun, daß sowohl für das bei $x = 0$ freie, wie für das dort gelagerte System die n-te Oberschwingung gerade n Knoten besitzt, wobei die durch die Lagerung erzwungenen Nullstellen nicht als Knoten zu zählen sind, wenn nicht in einem Lager mit endlichem Einspannungsgrad außer y auch y' verschwindet. Man hat dabei lediglich zu beachten, daß die Form der erzwungenen Schwingung für $\lambda = \lambda_i'$ mit der i-ten Eigenschwingungsform des ursprünglichen Systems übereinstimmen muß, da Differentialgleichung, Rand- und Übergangsbedingungen bei beiden Problemen übereinstimmen.

Wir können jetzt noch die bisher gemachte Voraussetzung der stabilen Lagerung des bei $x = 0$ freien Systems fallenlassen. Durch Anbringung einer weichen Einspannung an einem nach Abb. 7 statisch unterbestimmt gelagerten Stab kann man nämlich die elastischen Eigenschaften beliebig wenig ändern, während die Einflußfunktion für transversale Kräfte endlich wird.

Alle Schlüsse gelten auch für den Fall, daß bei $x = 0$ ein Lager von beliebigem Einspannungsgrad vorliegt. Da bei $y(0) = 0$ und positivem $(py'')'$ Monotonität aller Funktionen nur vermieden wird, wenn $c\,y'(0) = y''(0) < 0$, wo der Einspannungsgrad c eine positive Konstante ist, geht auch hier $y(x, \lambda)$ für $\lambda = \lambda_i'$ in der in Abb. 4 angedeuteten Weise durch $y(x, \lambda_i')$, wobei ein Knoten von $y(x, \lambda)$ von links hereinwandert. Im übrigen sind die Verhältnisse die gleichen wie bei dem oben betrachteten System, so daß alle einmal hereingewanderten Knoten erhalten bleiben.

Wir hatten vorausgesetzt, daß alle Eigenwerte einfach sind. Diese Voraussetzung bedeutet keine Einschränkung des Gültigkeitsbereiches des bewiesenen Satzes, da man immer durch eine beliebig kleine Änderung der elastischen Eigenschaften oder der Massenverteilung des Systemes erreichen kann, daß die ursprünglich zusammenfallenden Eigenwerte auseinanderrücken. Zudem scheinen mehrfache Eigenwerte bei den hier betrachteten Systemen nicht aufzutreten. 106

Ein nicht-lineares Elastizitätsgesetz bei rotierenden Kreisscheiben.

Von *H. Schlechtweg*, Frankfurt a. M.

Es handelt sich hier um die Berechnung der Spannungsverteilung in einer homogenen, isotropen, ringförmigen Kreisscheibe von verhältnismäßig geringer Höhe, die gleichförmig um ihre geometrische Achse rotiert; auf die einzelnen Volumenelemente der Scheibe möge nur die Zentrifugalkraft wirken. Das Problem hängt somit nur vom Radius ab. Wir machen weiterhin die Annahme, daß der Einfluß der Befestigung der Scheibe auf einer Welle sowie der ihrer eignen Schwere auf den Spannungszustand gering genug sind, um vernachlässigt werden zu können. Dann sind die Oberflächenbedingungen: die Radialkomponenten der Oberflächenkraft auf den Mantel der Scheibe verschwinden sowohl außen als auch innen. Nimmt man nun an, daß zwischen der Spannung und der Deformation ein linearer Zusammenhang bestehe nach der Art des Hookeschen Gesetzes, so läßt sich eine Differentialgleichung für die radiale Verschiebung angeben und auch ohne Schwierigkeit lösen [1]). Werden nun die Oberflächenbedingungen erfüllt, so erkennt man, daß von allen auftretenden Spannungen die am Innenrand des Kreisringes auftretende tangentiale Ringspannung am größten ist. Sie wird also die Komponente sein, die für das Zerspringen der Scheibe maßgebend ist. Tatsächlich hat man auch dies durch Experimente erkannt, bei denen die Geschwindigkeit von Schmirgel- und Karborundumscheiben bis zum Bersten gesteigert wurde: stets ergab sich ein Zerspringen der Scheiben in den Meridianebenen, und zwar von innen nach außen [2]). Die auf Grund der Versuche mit Hilfe der auf dem Hookeschen Gesetz

[1]) Vgl. etwa Grübler, ZVDI, 1897, Der Spannungszustand in Schleifsteinen und Schmirgelscheiben, S. 860.

[2]) Grübler, Versuche über die Festigkeit von Schleifsteinen, ZVDI, 1899, S. 1294; und „Versuche über die Festigkeit von Schmirgel- und Karborundumscheiben", ZVDI, 1903, S. 195; in beiden Arbeiten Abbildungen.

aufgebauten Theorie berechnete Sprengfestigkeit des Materials ergab sich jedoch als mehr wie doppelt so hoch gegenüber der durch Zerreißversuche bekannten Zugfestigkeit.

Man glaubte nun, diesen Widerspruch klären zu können durch die an Sandstein gemachte Beobachtung[3]), daß eine Proportionalität von Dehnungen und Spannungen nicht besteht, sondern daß die Dehnungen erheblich rascher wachsen als die Spannungen. Bach vermutete, daß diese weit über die Proportionalität hinausgehende starke Zunahme der Dehnungen mit den Spannungen bei einer rotierenden Scheibe hinsichtlich der Beanspruchung der innersten Fasern, die die am stärksten angestrengten sind, zur Folge hat, daß dieselbe recht erheblich geringer ausfällt, als sie sich durch die Rechnung mit dem Proportionalitätsgesetz ergibt. Grübler[4]) fand nun durch genauere Zugversuche an Sandsteinmaterial mit praktisch für Zugbeanspruchung genügender Näherung das Elastizitätsgesetz:

$$\sigma = \frac{\varepsilon}{A + B\varepsilon} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1),$$

wo σ die Spannung und ε die Dehnung ist. Aus den beiden von ihm durchgeführten Versuchen kann man die Werte von A und B feststellen. Man findet im einen Fall

$$A = \frac{1}{385800}; \qquad B = 0{,}1\,,$$

im andern Fall

$$A = \frac{1}{130800}; \qquad B = 0{,}008\,.$$

Wendete man nun dieses Elastizitätsgesetz auf unser Problem an, so ergab sich eine Differentialgleichung, die sich nicht lösen ließ; — außerdem ist sie nicht vollkommen richtig behandelt, wie wir später sehen werden. — Grübler ersetzte deshalb den durch das Elastizitätsgesetz in einem (σ, ε)-Koordinatensystem dargestellten Hyperbelbogen durch die Tangenten im Nullpunkt und in dem Punkt, in dem der Stab riß, und erhielt so für unser Problem an einem Beispiel, daß „der Einfluß der Abweichung des Dehnungsgesetzes vom Proportionalitätsgesetz trotz ihrer im vorliegenden Fall auffälligen Größe auf den Zahlenwert der größten Ringspannung in der rotierenden Scheibe verhältnismäßig ganz gering ist". Der obige Widerspruch, der in der Verschiedenheit von Sprengfestigkeit und Zugfestigkeit gesehen wird, bleibt somit bestehen. Grübler macht diese Aussage auf Grund seiner Näherung; er hat jedoch nicht die Möglichkeit, diese Näherung nach seinem Verfahren noch zu verbessern.

Das Ziel der vorliegenden Untersuchung ist es, den eben genannten Widerspruch auf seine Richtigkeit hin zu prüfen durch richtige Behandlung der Differentialgleichung für die radiale Verschiebung sowie Angabe einer Näherungsmethode, die die Differentialgleichung mit beliebiger Näherung zu lösen gestattet. Als Konsequenz wird sich u. a. ergeben[5]), daß tatsächlich ein Unterschied zwischen Sprengfestigkeit und Zugfestigkeit besteht, der jedoch nicht so groß ist, wie ihn Grübler angibt; dieser Unterschied zwischen Spreng- und Zugfestigkeit kann nur daran liegen, daß das Material beim Zugversuch in ganz andrer Weise beansprucht wird als beim Sprengversuch. Eine Aufhellung des Zusammenhanges zwischen der Festigkeit gegenüber einer gewissen Beanspruchung und der Festigkeit gegenüber einer anderen Beanspruchung ist aber erst dann möglich, wenn man in einwandfreier Weise Bescheid weiß über den Bruch eines elastischen Kontinuums. Wir müssen uns offensichtlich darüber klar sein, daß derselbe Werkstoff unter verschiedenen Kräften und Randbedingungen bei verschiedener Größe und Verteilung der inneren Spannungen bricht; die sog. Festigkeit eines Werkstoffes wird demnach abhängen von dem Experiment, das mit ihm gemacht wird, d. h. von den Kräften und Randbedingungen, denen er unterworfen wird.

1. Die Differentialgleichung für die Verschiebung. Wenn auch Grübler an der oben genannten Stelle bereits die Differentialgleichung für die Verschiebung angegeben hat, so wollen wir sie doch noch einmal auf einem anderen ebenfalls bereits bekannten Weg gewinnen, weil letzterer auch von prinzipieller Bedeutung sein dürfte bei schwierigeren Fällen als den vorliegenden. Denken wir uns durch die Scheibe, die von der radial gerichteten Zentrifugalkraft beansprucht wird, einen ebenen Schnitt gelegt mit der Normalen $\mathfrak{n}$; damit der Zusammenhang gewahrt bleibt, ist auf jeder Seite die Kraft

$$\mathfrak{p} = \mathfrak{P}\mathfrak{n}$$

[3]) Bach, Zur Frage: Besteht bei Sandstein Proportionalität zwischen Dehnungen und Spannungen? ZVDI, 1899, S. 1402.

[4]) Grübler, Ringspannungen und Zugfestigkeit, ZVDI, 1900, S. 1157.

[5]) Näheres hierüber in den sich auf diese Arbeit aufbauenden Arbeiten von Krug und Schlechtweg, Über den Spannungszustand in umlaufenden scheibenförmigen Körpern, Ing.-Arch., 1931 Bd. 2, Nr. 3 und Über den Spannungszustand in Schleifscheiben, ZVDI, 1931, S. 300.

anzubringen, wo $\mathfrak{P}$ der noch unbekannte Spannungstensor ist, oder in Zylinderkoordinaten geschrieben, wo die z-Achse mit der Drehachse zusammenfällt:

$$p_r = P_{rr} n_r + P_{r\varphi} n_\varphi + P_{rz} n_z$$
$$p_\varphi = P_{r\varphi} n_r + P_{\varphi\varphi} n_\varphi + P_{\varphi z} n_z$$
$$p_z = P_{rz} n_r + P_{\varphi z} n_\varphi + P_{zz} n_z .$$

p_r, p_φ, p_z sind die Komponenten von $\mathfrak{p}$ in Zylinderkoordinaten. Es muß nun für jede beliebige Lage eines Schnittes $p_z = 0$ sein; da die Scheibe nur in ihrer eigenen Ebene beansprucht wird, kann nämlich $\mathfrak{p}$ nicht aus dieser Ebene herausweisen an einer Schnittfläche. Also ist

$$P_{rz} = 0, \quad P_{\varphi z} = 0, \quad P_{zz} = 0,$$

da $\mathfrak{n}$ beliebig ist. Wird nun der Schnitt so geführt, daß $n_r = 0$ und $n_\varphi = 0$ ist, er also parallel zu den beiden Begrenzungsebenen der Scheibe geführt ist, so ist keine Kraft zum Zusammenhalten der Teile nötig bei unsrer Art der Beanspruchung; also muß, wie bereits vorhin erhalten, $P_{rz} = 0$, $P_{\varphi z} = 0$, $P_{zz} = 0$ sein. Wird der Schnitt so geführt, daß $n_r = 0$ und $n_z = 0$ ist, also in Richtung eines Durchmessers aufgeschnitten, so würde in nebenstehender Abbildung die untere Hälfte von der oberen weggerissen, da wohl auf die halbkreisförmige Peripherie radiale Kräfte wirken, jedoch keine auf den ebenen Rand; es muß also, um Gleichgewicht zu bekommen zwischen beiden Teilen, eine Kraft auf den Schnitt senkrecht zu seiner Richtung angebracht werden; d. h. in diesem Schnitt ist $p_r = 0$, $p_\varphi \neq 0$; also ist

$$P_{r\varphi} = 0; \quad P_{\varphi\varphi} \neq 0 .$$

RA 150 Z 1

Abb. 1.

Führt man einen kreisförmigen Schnitt, für den $n_\varphi = 0$ und $n_z = 0$ ist, so sieht man, **daß** $p_\varphi = 0$ und $p_z = 0$ ist, also

$$P_{rr} \neq 0 .$$

Nun betrachten wir die Bewegungsgleichung; sie lautet, wenn $\mathfrak{f}$ die Volumenkraft ist,

$$\operatorname{div} \mathfrak{P} + \mathfrak{f} = 0 .$$

Weil $\mathfrak{f}$ die Zentrifugalkraft ist, also $f_\varphi = f_z = 0$ sind, so folgt daraus als einzige Gleichung[6]):

$$\frac{\partial P_{rr}}{\partial r} + \frac{1}{r} P_{rr} - \frac{1}{r} P_{\varphi\varphi} + f_r = 0 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (2).$$

Unter Benutzung von $f_r = \varrho \omega^2 r$, wo ϱ die Dichte und ω die Winkelgeschwindigkeit ist, erhält man so dieselbe Relation wie auch Grübler.

Um nun die Differentialgleichung für die sich einstellende elastische Verschiebung angeben zu können, muß man den Zusammenhang zwischen Spannung und Deformation benutzen. Es seien S_{ik} die Komponenten des Spannungstensors $\mathfrak{S}$, definiert durch

$$S_{xx} = \frac{\partial s_x}{\partial x}, \quad S_{xy} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial s_x}{\partial y} + \frac{\partial s_y}{\partial x}\right) \text{usw.},$$

wo s_x, s_y, s_z die Komponenten des Verschiebungsvektors $\mathfrak{s}$ in einem kartesischen rechtwinkligen Koordinatensystem sind. Dann besagt das Elastizitätsgesetz (1) in unserem Fall

$$P_{ii} = \frac{S_{ii}}{A + B S_{ii}} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (3),$$

wo P_{ik} die Komponenten des Spannungstensors $\mathfrak{P}$ sind. In der letzten Formel ist noch für S_{ii} die radiale Verschiebung s einzuführen, da beim Einsetzen in (2) eine Gleichung für s entstehen soll. Dies erreicht man durch systematische Rechnung z. B. auf folgende Weise; es seien $\mathfrak{e}_1$, $\mathfrak{e}_2$, $\mathfrak{e}_3$ die Grundvektoren des benutzten Koordinatensystems, also in einem Zylinderkoordinatensystem[7]):

$$e_1 = 1, \quad e_2 = r, \quad e_3 = 1 .$$

Dann ergibt sich, wenn s_i die Komponente von $\mathfrak{s}$ in Richtung von $\mathfrak{e}_i$ ist[8]),

$$S_{ii} = \frac{\partial}{\partial x^i}\left(\frac{s_i}{e_i}\right) + \frac{1}{e_i} \sum_{k=1}^{3} \frac{s_k}{e_k} \frac{\partial e_i}{\partial x^k},$$

[6]) Madelung, Die math. Hilfsmittel des Physikers, 2. Aufl., S. 179.
[7]) Madelung, Math. Hilfsmittel, 2. Aufl., S. 183.
[8]) Madelung, Math. Hilfsmittel, 2. Aufl., S. 179.

wo x^1, x^2, x^3 die Koordinaten sind. Man kommt dann in unserem speziellen Fall durch Einsetzen des Wertes von S_{ii} in (3) und durch Einsetzen des Wertes von P_{ii} in (2) zu derselben Gleichung wie Grübler:

$$A\,r\,s'' - \left(\frac{s}{A\,r + B\,s} - \varrho\,\omega^2\,r^2\right)(A + B\,s')^2 + (A + B\,s')\,s = 0\,. \quad (4).$$

Sie geht für den Fall $B = 0$ über in die Differentialgleichung für s in einem rein elastischen Medium.

2. Die Umformung der Differentialgleichung. Um nun die Differentialgleichung in eine für die Lösung geeignete Form zu bekommen, macht Grübler[9]) die Transformation

$$A\,r + B\,s = u$$

und erhält

$$u'' + \left(\frac{1}{u} + \frac{B\,\varrho\,\omega^2}{A}\,r\right)\cdot(u')^2 - \frac{1}{r}\,u' = 0 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (5).$$

Nun ist, wie auch Grübler bemerkt, diese Differentialgleichung nicht in geschlossener Form lösbar; Grübler führt nun die Lösung nicht durch, weil die von ihm versuchten Näherungsmethoden auf zu umständliche Rechnungen führten. Er begnügt sich deshalb mit der oben erwähnten rohen Annäherung durch zwei Tangenten an die durch (1) bestimmte Kurve. Inzwischen ist jedoch in der Literatur ein hier gut anwendbares Näherungsverfahren bekannt geworden; es wurde z. B. entwickelt bei der Untersuchung der Stellung der Quantenmechanik zur Bohrschen Theorie von Wentzel und Brillouin[10]), worauf wir gleich eingehen werden. Die Lösung, die man so erhält, muß dann für $B = 0$ in die bei ideal elastischem Medium gültige Lösung[11]) übergehen:

$$s_e = -\frac{A\,\varrho\,\omega^2}{8}\,r^3 + c_1\,r + \frac{c_2}{r}\,,$$

wo c_1 und c_2 Integrationskonstanten sind. Führt man die Lösung der Differentialgleichung (5) auf dem angegebenen Wege durch, so ergibt sich, daß ein stetiger Anschluß dieser Lösung an s_e nicht möglich ist. Es ist ja auch für $B = 0$ die Variable u überhaupt keine von der unabhängigen Variable verschiedene abhängige Variable mehr; die obige Substitution Grüblers $A\,r + B\,s = u$ ist also wohl mathematisch möglich, liefert jedoch keine stetige Anschlußmöglichkeit an das einfachere, ideal elastische Problem.

Wir müssen also ausgehen von der Differentialgleichung (4) und nicht von (5). Die Gleichung (4) schreiben wir in der Form:

$$s'' + \frac{s'}{r} - \frac{s}{r^2} + A\,\varrho\,\omega^2\,r + s'\left(2\,B\,\varrho\,\omega^2\,r - \frac{2\,B\,s}{A\,r^2 + B\,s\,r}\right) + s'^2\left(-\frac{B^2}{A}\,\frac{s}{A\,r^2 + B\,s\,r} + \frac{B^2}{A}\,\varrho\,\omega^2\,r + \frac{B}{A\,r}\right)$$
$$+ s^2\cdot\frac{A\,B}{A\,r^2 + B\,s\,r} = 0\,.$$

Multiplikation mit $\left(1 + \frac{B\,s}{A\,r}\right)$ liefert:

$$\left.\begin{array}{l} s'' + \dfrac{s'}{r} - \dfrac{s}{r^2} + A\,\varrho\,\omega^2\,r + \dfrac{B}{A\,r}\,s\,s'' + \varrho\,\omega^2\,B\,s + s'\left(2\,B\,\varrho\,\omega^2\,r + \dfrac{2\,B^2}{A}\,\varrho\,\omega^2\,s - \dfrac{B}{A}\,\dfrac{s}{r^2}\right) \\ + B\,s^2\left(-\dfrac{1}{A\,r^3} + \dfrac{1}{r^2}\right) + s'^2\left(\dfrac{B^2}{A}\,\varrho\,\omega^2\,r + \dfrac{B^3}{A^2}\,\varrho\,\omega^2\,s + \dfrac{B}{A\,r}\right) = 0 \end{array}\right\} \quad . \; . \; . \; . \quad (6).$$

Diese Differentialgleichung führt für $B = 0$ auf den elastischen Fall und läßt sich dann durch s_e lösen.

3. Die Lösung der Differentialgleichung. Wir lösen nun Gl. (6) nach dem Verfahren von Wentzel und Brillouin, indem wir den Ansatz machen:

$$s(r) = \sum_{\lambda=0}^{\infty} B^\lambda\,s_\lambda(r)\,.$$

[9]) Grübler, Ringspannungen und Zugfestigkeit. ZVDI. 1900, S. 1157.

[10]) Vgl. z. B. Sommerfeld, Atombau und Spektrallinien. Wellenmechanischer Ergänzungsband, S. 158 f.

[11]) Grübler, Der Spannungszustand in Schleifscheiben und Schmirgelscheiben. ZVDI. 1897, S. 860.

Diese Potenzreihe in B wird in einer gewissen Umgebung von $B=0$ konvergent sein, da sie für $B=0$ selbst konvergiert; indem wir uns also auf genauere Konvergenzfragen nicht einlassen, setzen wir diesen Ausdruck in die Differentialgleichung (6) ein und erhalten:

$$\left.\begin{aligned}&\sum_{\lambda=0}^{\infty} B^{\lambda} s_{\lambda}'' + \frac{1}{r}\sum_{\lambda=0}^{\infty} B^{\lambda} s_{\lambda}' - \frac{1}{r^2}\sum_{\lambda} B^{\lambda} s_{\lambda} + \varrho\omega^2 A r + \frac{1}{A r}\sum_{\lambda} B^{\lambda+1}\sum_{\nu=0}^{\lambda} s_{\nu}'' s_{\lambda-\nu} + \varrho\omega^2 \sum_{\lambda} B^{\lambda+1} s_{\lambda}\\ &\quad + 2 B \varrho\omega^2 r \sum_{\lambda} B^{\lambda} s_{\lambda}' + \left(\frac{2B^2}{A}\varrho\omega^2 - \frac{B}{A r^2}\right)\sum_{\lambda} B^{\lambda}\sum_{\nu=0}^{\lambda} s_{\nu}' s_{\lambda-\nu}\\ &\quad + \left(\frac{B^2}{A}\varrho\omega^2 r + \frac{B}{A r}\right)\sum_{\lambda} B^{\lambda}\sum_{\nu=0}^{\lambda} s_{\nu}' s'_{\lambda-\nu} + \frac{B^3}{A^2}\varrho\omega^2\sum_{\lambda} B^{\lambda}\sum_{t=0}^{\lambda} s_{\lambda-t}\sum_{\nu=0}^{t} s_{\nu}' s'_{t-\nu}\\ &\quad + \left(\frac{B}{r^2} - \frac{B}{A r^3}\right)\sum_{\lambda} B^{\lambda}\sum_{\nu=0}^{\lambda} s_{\nu} s_{\lambda-\nu} = 0\end{aligned}\right\} \quad (7).$$

Diese Gleichung wird jetzt als Identität in B aufgefaßt. Die dann zu fordernde Gleichheit der von B freien Glieder ergibt:

$$s_0'' + \frac{s_0'}{r} - \frac{s_0}{r^2} + \varrho\omega^2 A r = 0$$

mit der Lösung

$$s_0 = -\frac{A\varrho\omega^2}{8} r^3 + c_1 r + \frac{c_2}{r^2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (8).$$

Die Koeffizienten B der Identität (7) ergeben als Differentialgleichung für s_1:

$$\begin{aligned}&s_1'' + \frac{s_1'}{r} - \frac{s_1}{r^2} + \frac{A^2\varrho^2\omega^4}{64} r^4 - \frac{45}{64} A\varrho^2\omega^4 r^3 - \frac{A c_1\varrho\omega^2}{4} r^2 + \frac{9}{4} c_1\varrho\omega^2 r - \frac{A c_2\varrho\omega^2}{4}\\ &\quad + c_1^2 - \frac{c_2\varrho\omega^2}{2r} - \frac{c_1^2}{A r} + \frac{2 c_1 c_2}{r^2} - \frac{2 c_1 c_2}{A r^3} + \frac{c_2^2}{r^4} + \frac{3 c_2^2}{A r^5} = 0.\end{aligned}$$

Nun hat aber allgemein die Differentialgleichung

$$s_1'' + \frac{s_1'}{r} - \frac{s_1}{r^2} + a r^n = 0.$$

Die Lösung

$$s_1 = -a\frac{r^{n+2}}{(n+2)^2 - 1} \quad \text{für } n \neq -1 \text{ und } n \neq -3 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (9).$$

Man sieht leicht, daß im Fall $n=-1$ bzw. $n=-3$ die Lösung folgende ist:

$$s_1 = -\frac{a}{2} r \log r \quad \text{bzw.} \quad s_1 = \frac{a}{2r}\log r \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (9').$$

Also wird

$$\left.\begin{aligned}s_1 = &-\frac{A^2\varrho^2\omega^4}{2240} r^6 + \frac{15}{512} A\varrho^2\omega^4 r^5 + \frac{A c_1\varrho\omega^2}{60} r^4 - \frac{9}{32} c_1\varrho\omega^2 r^3 + \frac{A c_2\varrho\omega^2}{12} r^2 - \frac{c_1^2 r^2}{3}\\ &+ \frac{c_2\varrho\omega^2}{4} r\log r + \frac{c_1^2}{2A} r\log r + 2 c_1 c_2 - \frac{c_1 c_2}{A r}\log r - \frac{c_2^2}{3r^2} - \frac{3 c_2^2}{8 A r^3}\end{aligned}\right\} \quad (10).$$

Die Koeffizienten von B^2 in der Identität (7) ergeben eine Differentialgleichung für s_2; um sie lösen zu können, braucht man noch die Lösung einer Gleichung von folgendem Typ:

$$s_2'' + \frac{s_2'}{r} - \frac{s_2}{r^2} + a r^n \log r = 0.$$

Sie hat als Lösung:

$$s_2 = -\frac{a}{(n+2)^2 - 1} r^{n+2}\log r + \frac{2a(n+2)}{[(n+2)^2-1]^2} r^{n+2} \quad \text{für } n \neq -1 \text{ und } n \neq -3 \quad \ldots \quad (11).$$

Für $n=-1$ bzw. $n=-3$ erhält man folgende Lösungen:

$$s_2 = -\frac{a}{4} r(\log r)^2 + \frac{a}{4} r\log r \quad \text{bzw.} \quad s_2 = \frac{a}{4r}(\log r)^2 + \frac{a}{4r}\log r \quad \ldots\ldots\ldots \quad (11').$$

Man erhält dann

$$\left.\begin{aligned}
s_2 = & -\frac{A^3\varrho^3\omega^6}{716800}r^9 + \frac{697}{4515840}A^2\varrho^3\omega^6 r^8 + r^7\left(\frac{5}{16384}A\varrho^3\omega^6 + \frac{17}{161280}A^2 c_1\varrho^2\omega^4\right) \\
& -\frac{1751}{313600}A c_1\varrho^2\omega^4 r^6 - r^5\left(-\frac{535}{6144}c_1\varrho^2\omega^4 - \frac{73}{80640}A^2 c_2\varrho^2\omega^4 + \frac{7}{1440}A c_1^2\varrho\omega^2\right) \\
& + r^4\left(\frac{337}{3600}c_1^2\varrho\omega^2 - \frac{1975}{80640}A c_2\varrho^2\omega^4 + \frac{1}{240}A c_2\varrho^2\omega^4\log r + \frac{1}{120}c_1^2\varrho\omega^2\log r\right) \\
& + r^3\left(\frac{3}{80}c_1 c_2\varrho\omega^2 - \frac{81}{2048}c_2\varrho^2\omega^4 - \frac{35}{256}\frac{c_1^2}{A}\varrho\omega^2 - \frac{9}{128}c_2\varrho^2\omega^4\log r - \frac{9}{64}\frac{c_1^2}{A}\varrho\omega^2\log r\right) \\
& + r^2\left(\frac{19}{80}c_1 c_2\varrho\omega^2 + \frac{5}{9}\frac{c_1^3}{A} - \frac{1}{2}c_1 c_2\varrho\omega^2\log r - \frac{1}{3}\frac{c_1^3}{A}\log r\right) \\
& + r\log r\left(-\frac{A}{8}c_2^2\varrho\omega^2 - \frac{5}{3}c_1 c_2 + \frac{45}{32}\frac{c_1 c_2}{A}\varrho\omega^2 - \frac{3c_1^3}{4A^2} - \frac{c_1 c_2}{16A}\varrho\omega^2\log r + \frac{c_1^3}{4A^2}\log r\right) \\
& + \frac{23}{32}c_2\varrho\omega^2 - \frac{5c_1^2 c_2}{A} - \frac{c_1^2 c_2}{A}\log r + \frac{c_2^2}{2}\varrho\omega^2\log r \\
& + \frac{1}{r}\log r\left(\frac{c_2^2}{64A}\varrho\omega^2 + \frac{5}{3}c_1 c_2^2 + \frac{c_1^2 c_2}{4A^2}\log r - \frac{c_2^2}{8A}\varrho\omega^2\log r\right) \\
& + \frac{1}{r^2}\left(\frac{7}{12}\frac{c_1 c_2^2}{A} + \frac{2}{3A}c_1 c_2^2\log r\right) + \frac{1}{r^3}\left(\frac{3}{32}\frac{c_1 c_2^2}{A^2} + \frac{c_2^3}{12} + \frac{3}{4}\frac{c_1 c_2^2}{A^2}\log r\right) \\
& + \frac{61}{180}\frac{c_2^3}{A r^4} + \frac{11}{32}\frac{c_2^3}{A^2 r^5}
\end{aligned}\right\} \quad . \; . \; (12).$$

Allgemein erhält man als für $\lambda \geqq 3$ gültige Rekursionsformel:

$$\left.\begin{aligned}
& s_\lambda'' + \frac{s_\lambda'}{r} - \frac{s_\lambda}{r^2} + \varrho\omega^2 s_{\lambda-1} + 2\varrho\omega^2 r s'_{\lambda-1} + \frac{1}{Ar}\sum_{\nu=0}^{\lambda-1} s_\nu'' s_{\lambda-\nu-1} - \frac{1}{Ar^2}\sum_{\nu=0}^{\lambda-1} s_\nu' s_{\lambda-\nu-1} \\
& + \frac{1}{Ar}\sum_{\nu=0}^{\lambda-1} s_\nu' s'_{\lambda-\nu-1} + \left(\frac{1}{r^2} - \frac{1}{Ar^3}\right)\sum_{\nu=0}^{\lambda-1} s_\nu s_{\lambda-\nu-1} + \frac{2\varrho\omega^2}{A} r \sum_{\nu=0}^{\lambda-2} s_\nu' s_{\lambda-\nu-2} \\
& + \frac{\varrho\omega^2}{A} r \sum_{\nu=0}^{\lambda-2} s_\nu' s'_{\lambda-\nu-2} + \frac{\varrho\omega^2}{A^2}\sum_{\nu=0}^{\lambda-3} s_{\lambda-\nu-3}\sum_{\mu=0}^{\nu} s_\mu' s'_{\nu-\mu} = 0.
\end{aligned}\right\} \quad . \; . \; (13).$$

Nun ist aber allgemein $s_k(r)$ ein Polynom in r und $\frac{1}{r}$, und außerdem kommen noch Glieder von der Form $r^n(\log r)^m$ vor. Für die r^n als inhomogene Glieder läßt sich eine spezielle Lösung nach (9) bzw. (9′) angeben. Für inhomogene Glieder von der Form $r^n(\log r)^m$ kommt man beim Suchen einer speziellen Lösung nach der Methode der Variation der Konstanten auf Integrale von der Form $\int r^n(\log r)^m\,dr$ und $\int r^{n+2}(\log r)^m\,dr$; da m eine von null verschiedene natürliche Zahl ist, so wird durch partielle Integration:

$$\int r^n(\log r)^m\,dr = \frac{r^{n+1}}{n+1}(\log r)^m - \frac{m}{n+1}\int r^n(\log r)^{m-1}\,dr.$$

Da man durch weitere partielle Integration bis auf $\int r^n\log r\,dr$ kommen kann und das Entsprechende gilt, wenn n durch $n+2$ ersetzt wird, so sieht man, daß bei diesen inhomogenen Gliedern die Differentialgleichung für $n \neq -1$ lösbar ist; im Fall $n = -1$ wird

$$\int\frac{1}{r}(\log r)^m\,dr = (\log r)^{m+1} - m\int\frac{1}{r}(\log r)^m\,dr,$$

also

$$\int\frac{1}{r}(\log r)^m\,dr = \frac{1}{m+1}(\log r)^{m+1}.$$

Wir kommen also zusammenfassend zu dem Ergebnis, daß die Differentialgleichung (13) für $s_\lambda(r)$ integrabel ist.

Wir haben somit

$$\left.\begin{aligned} s = & -\frac{A\varrho\omega^2}{8}r^3 + c_1 r + \frac{c_2}{r} + B\Bigg(-\frac{A^2\varrho^2\omega^4}{2240}r^6 + \frac{15}{512}A\varrho^2\omega^4 r^5 + \frac{A c_1}{60}\varrho\omega^2 r^4 - \frac{9}{32}c_1\varrho\omega^2 r^3 \\ & + \frac{A}{12}c_2\varrho\omega^2 r^2 - \frac{c_1^2}{3}r^2 + \frac{c_2\varrho\omega^2}{4}r\log r + \frac{c_1^2}{2A}r\log r + 2c_1c_2 - \frac{c_1c_2}{Ar}\log r - \frac{c_2^2}{3r^2} \\ & - \frac{3c_2^2}{8Ar^3}\Bigg) + B^2(\ldots) + \ldots \end{aligned}\right\} \quad (14).$$

Dabei ist der Koeffizient von B^2 aus Formel (12) zu entnehmen, und weitere Reihenglieder berechnen sich aus der Rekursionsformel (13). Bemerkenswert ist übrigens, daß der Vorgang durch das Produkt $\varrho\omega^2$ bestimmt ist; dies letztere gilt übrigens exakt. Wegen der kleinen Größe von B wird es wohl in vielen Fällen genügen, nur das in B lineare Glied der Entwicklung zu berücksichtigen.

4. Die Erfüllung der Oberflächenbedingungen und Berechnung der inneren Ringspannung. Jetzt sind noch die Konstanten c_1 und c_2 des Ausdruckes (14) zu berechnen aus den Randbedingungen; sie bestehen darin, daß auf den inneren und äußeren Mantel der Ringscheibe gegebene Drucke wirken. Ist R_a der Außenradius, R_i der Innenradius, P_a der auf den äußeren Mantel wirkende Druck und P_i der auf den inneren Mantel wirkende Druck, so lauten demnach die Oberflächenbedingungen:

$$P_{rr} = P_a \text{ für } r = R_a$$
$$P_{rr} = P_i \text{ für } r = R_i\,.$$

Da die Komponente S_{rr} des Deformationstensors $\mathfrak{S}$ den Wert hat $S_{rr} = \frac{ds}{dr} = s'$, so ergibt sich aus (3):

$$\frac{A P_a}{1 - B P_a} = s' \text{ für } r = R_a$$
$$\frac{A P_i}{1 - B P_i} = s' \text{ für } r = R_i\,.$$

Die sich hieraus unter Benutzung der Lösung (14) ergebenden Gleichungen lassen sich nach steigenden Potenzen von B ordnen. Für die Praxis sollen uns hier nur die in B linearen Glieder interessieren; der Ansatz:

$$c_1 = c_{e1} + B\gamma_1$$
$$c_2 = c_{e2} + B\gamma_2,$$

wo c_{e1} und c_{e2} die sich im ideal elastischen Fall ergebenden Konstanten sind, führt für $P_a \neq 0$ und $P_i \neq 0$ zu sehr unübersichtlichen Ausdrücken; wir wollen deshalb von jetzt ab den Einfluß der Befestigung der Scheibe auf der Welle vernachlässigen; es sei also $P_a = 0$ und $P_i = 0$; dies führt dann zu folgendem Ergebnis, wenn

$$\frac{R_a}{R_i} = a$$

gesetzt wird und $R_a = R$ gesetzt wird:

$$\left.\begin{aligned} c_{e1} &= \frac{3}{8}A\varrho\omega^2 R^2\left(1 + \frac{1}{a^2}\right); \qquad c_{e2} = \frac{3}{8}A\varrho\omega^2\frac{R^4}{a^2} \\ \gamma_2 &= \frac{A^2\varrho^2\omega^4}{70}\frac{R^7}{a^4\left(1-\frac{1}{a^2}\right)}\left(5a^2 + 7 - \frac{7}{a} - \frac{5}{a^3}\right) + \frac{A\varrho^2\omega^4}{128}\frac{R^6}{a^4\left(1-\frac{1}{a^2}\right)} \\ &\quad \left\{24a^2\left(1 - \frac{1}{a^4}\right) + 18a^2\left(1 - \frac{1}{a^4}\right)\log R - \left(27a^2 + 48 + \frac{9}{a^2}\right)\log a\right\} \\ \gamma_1 &= \frac{A^2\varrho^2\omega^4}{70}\frac{R^5}{a^3\left(1-\frac{1}{a^2}\right)}\left(5a^3 + 7a - \frac{7}{a} - \frac{5}{a^3}\right) + \frac{A\varrho^2\omega^4}{512}\frac{R^4}{a^4\left(1-\frac{1}{a^2}\right)} \\ &\quad \left\{51a^4 + 159a^2 - 159 - \frac{51}{a^2} - (36a^4 + 120a^2 + 36)\left(1 - \frac{1}{a^2}\right)\log R - (108a^2 + 156)\log a\right\} \end{aligned}\right\} \quad (15).$$

Hierdurch sind jetzt die Konstanten c_1 und c_2 der Lösung (14) festgelegt.

Von den Spannungen, die durch die Verschiebung (14) im Inneren der Kreisscheibe hervorgerufen werden, interessiert für die Praxis aus den oben angegebenen Gründen besonders die **Größe der Ringspannung $P_{\varphi\varphi}$ am inneren Rand der Scheibe**. Aus dem Elastizitätsgesetz (3) ergibt sich unter Benutzung von $S_{\varphi\varphi} = \frac{s}{r}$, da[12])

$$S_{ii} = \frac{\partial}{\partial x^i}\left(\frac{s_i}{e_i}\right) + \frac{1}{e_i}\sum_{k=1}^{3} \frac{s_k}{e_k}\frac{\partial e_i}{\partial x^k}$$

für die Größe von $P_{\varphi\varphi}$:

$$P_{\varphi\varphi}(r) = \frac{s(r)}{A\,r + B\,s(r)}.$$

Dann ergibt die weitere Rechnung für die innere Ringspannung:

$$\left.\begin{aligned} P_{\varphi\varphi}(R_i) = {} & \frac{1}{1 + B\frac{\varrho\,\omega^2}{4}R^2\left(3+\frac{1}{a^2}\right)}\left\{\frac{\varrho\,\omega^2}{4}R^2\left(3+\frac{1}{a^2}\right) + \frac{B\,\varrho^2\,\omega^4}{4480}\frac{R^4}{a^4}\left\{\frac{1}{a(a+1)}\Big[a^6(640\,A\,R - 210\log R)\right.\right. \\ & + a^5(535\,A\,R - 210\log R) + a^4(1431\,A\,R - 420\log R) + a^3(1151\,A\,R - 420\log R) \\ & + a^2(703\,A\,R - 210\log R) + a(136\,A\,R - 210\log R) - 184\,A\,R\Big] \\ & \left.\left. + 105\left(10\,a^4 + 21\,a^2 + 1 - \frac{4\,a^6 + 30\,a^4 + 17\,a^2 - 1}{a^2-1}\log a\right)\right\}\right\} \end{aligned}\right\} (16).$$

Wir bringen jetzt noch den letzteren Ausdruck auf eine Form, in der das erste Glied der rechten Seite die bei linearem Elastizitätsgesetz herrschende innere Ringspannung darstellt:

$$\left.\begin{aligned} P_{\varphi\varphi}(R_i) = {} & \frac{\varrho\,\omega^2}{4}R^2\left(3+\frac{1}{a^2}\right) - \frac{B\,\varrho^2\,\omega^4\,R^4}{16\left\{1 + B\frac{\varrho\,\omega^2}{4}R^2\left(3+\frac{1}{a^2}\right)\right\}}\left\{\left(3+\frac{1}{a^2}\right)^2\right. \\ & + \frac{1}{280\,a^5(a+1)}\big[a^6(210\log R - 640\,A\,R) + a^5(210\log R - 535\,A\,R) \\ & + a^4(420\log R - 1431\,A\,R) + a^3(420\log R - 1151\,A\,R) + a^2(210\log R - 703\,A\,R) \\ & + a(210\log R - 136\,A\,R) + 184\,A\,R\big] \\ & \left. - \frac{3}{8\,a^4}\left(10\,a^4 + 21\,a^2 + 1 - \frac{4\,a^6 + 30\,a^4 + 17\,a^2 - 1}{a^2 - 1}\log a\right)\right\} \end{aligned}\right\} (17).$$

Um nun eine Anschauung von der Art der Abhängigkeit des Ausdruckes für $P_{\varphi\varphi}(R_i)$ von den Parametern B, $\varrho\,\omega^2$, R, a zu bekommen, wo A als fest angenommen sei, stellt man am einfachsten $P_{\varphi\varphi}(R_i)$ in seiner Abhängigkeit von R graphisch dar. Die so in einem Koordinatensystem, in dem R Abszisse und $\frac{P_{\varphi\varphi}(R_i)}{\varrho\,\omega^2}$ Ordinate ist, erhaltenen Kurven bezeichnen wir als die Charakteristiken[13]). Man erhält dann für jedes fest gewählte $C = \frac{3}{4}B\,\varrho\,\omega^2$ eine ∞^1-fache Schar von Charakteristiken, die der Veränderung von a entsprechen; im ganzen erhält man also, da B nur in der Kombination $B\,\varrho\,\omega^2$ auftritt, eine ∞^2-fache Schar von Charakteristiken, die der Veränderung von a und C entsprechen.

Da wir nun aber nur die in B linearen Glieder der Gl. (14) benutzt haben, so gibt Gl. (17) nur die innere Ringspannung richtig wieder für solche Arbeitspunkte auf einer Charakteristik, die in nicht zu großer Entfernung von der sich bei ideal elastischen Verhältnissen für $\frac{P_{\varphi\varphi}(R_i)}{\varrho\,\omega^2}$ ergebenden Parabel liegen. Mit fallendem C schmiegen sich die Charakteristiken immer mehr an die ideal elastische Parabel an, die zu demselben a gehört, in der Art, wie es Abb. 2 zeigt, wo die mit $C = 0$ bezeichnete Kurve die ideal elastische Parabel ist und $C_2 < C_1$ ist. Außerdem wird mit fallendem C jedenfalls der Gültigkeitsbereich

[12]) Madelung, Math. Hilfsmittel, 2. Aufl., S. 179.

[13]) Über die geometrische Gestalt der Charakteristiken sowie ihre Diskussion für praktisch interessierende Fälle vgl. Krug und Schlechtweg, Über den Spannungszustand in umlaufenden scheibenförmigen Körpern, Ing.-Arch., Bd. 2 (1931) Nr. 3; sowie Krug und Schlechtweg, Über den Spannungszustand in Schleifscheiben, Maschinenbau-Betrieb, Bd. 20 (1931) Nr. 7.

von Gl. (17) in R größer. Gibt also eine Charakteristik für C_1 bei einem festen a einen praktisch richtigen Wert bis zu einer Stelle R_1, so gibt die Charakteristik für C_2, wo $C_2 < C_1$ ist, bei demselben festen a einen praktisch richtigen Wert bis zu einer Stelle R_2, wo $R_2 > R_1$ ist (vgl. Abb. 3). Als Gültigkeitsbereich für die Darstellung der inneren Ringspannung durch Gl. (17) hat man also ein Gebiet von der Art zu erwarten, wie es in Abb. 4 schraffiert ist. Durch numerische Rechnung kann man sich dadurch ein Urteil über die Güte von Gl. (17) für ein gewisses R verschaffen bei bestimmt gewählten übrigen Parametern C und a, indem man noch in der Gl. (14) für s das in B quadratische Glied benutzt und prüft, ob hierdurch der vorher berechnete Wert von $\frac{P_{\varphi\varphi}(R_i)}{\varrho\,\omega^2}$ noch nennenswert geändert wird. Wir gehen nicht näher hierauf ein.

Abb. 2.

Abb. 3.

Abb. 4.

Eine praktisch interessante Frage ist nun die, für welche äußeren Radien R die durch Gl. (17) dargestellte innere Ringspannung kleiner ist als die durch das lineare Elastizitätsgesetz bedingte und für welche Radien größer. Aus (17) erkennt man, daß die Größe von R, bei der $P_{\varphi\varphi}$ gleich dem durch das lineare Elastizitätsgesetz bestimmten Wert ist, von B in 1. Näherung unabhängig ist. Es ergibt sich, wenn man berücksichtigt, daß A im praktischen Fall von der Größenordnung $\frac{1}{2}\cdot 10^{-5}$ ist, daß $P_{\varphi\varphi}$ über dem ideal elastischen Wert liegt, wenn der äußere Radius eine Größe hat, die bei jedem a eine Ordnung hat, die kleiner als 10^{-3} ist. Für praktisch in Frage kommende Außenradien liegt also die innere Ringspannung stets unter dem durch das lineare Elastizitätsgesetz bestimmten Wert; das Ergebnis Grüblers, das hierzu im Widerspruch steht, ist also abzulehnen; denn es verlangt für sehr großes Radienverhältnis eine höhere innere Ringspannung, als sie sich durch das lineare Elastizitätsgesetz ergibt. — Eine praktische Anwendung fand die vorstehende Rechnung, wie bereits oben angedeutet wurde, bei der Untersuchung des Spannungszustandes in Schleifscheiben. 150

Näherungsverfahren zur Berechnung des Wärmeaustausches in Regeneratoren.

Von *H. Hausen*, Höllriegelskreuth bei München.

Einleitung. Zum Wärmeaustausch zwischen Gasen verschiedener Anfangstemperatur dienen in der Technik entweder Regeneratoren oder Rekuperatoren. Während beim Rekuperator beide Gase ein rohr- oder kanalähnliches System kontinuierlich durchströmen, wird beim Regenerator die Oberfläche einer wärmespeichernden Masse abwechselnd vom warmen und kalten Gas bespült. Der ununterbrochene Betrieb erfordert wenigstens zwei Regeneratoren, damit gleichzeitig das warme Gas in einem Regenerator abgekühlt und das kalte Gas in einem anderen erwärmt werden kann.

Für den streng periodischen Beharrungszustand[1]), der sich im Regenerator nach sehr langer Zeit einstellt, wenn in stets gleichbleibenden Zeitabständen umgeschaltet wird, hat der Verfasser[2]) erstmalig eine genaue Theorie entwickelt. Hiernach wird das abwechselnde Steigen und Sinken der Temperaturen im Regenerator als erzwungene Temperaturschwingung aufgefaßt und diese in Eigenschwingungen zerlegt. Da jedoch die zahlenmäßige Auswertung nach diesem Verfahren sehr mühsam ist, haben Nußelt und der Verfasser ungefähr gleich-

[1]) Die erste Erwärmung oder Abkühlung der Speichermasse bei der Inbetriebsetzung wurde schon vorher von Anzelius und unabhängig davon ausführlicher und allgemeiner von Nußelt exakt behandelt; siehe A. Anzelius, Z. f. ang. Math. u. Mech. Bd. 6 (1926) S. 291 und W. Nußelt, Z. d. Ver. deutscher Ing. Bd. 71 (1927) S. 85.

[2]) Habilitationsschrift des Verfassers vom Februar 1927; auszugsweise veröffentlicht in Z. d. Ver. deutscher Ing. Bd. 73 (1929) S. 431, ausführlicher in Z. f. ang. Math. u. Mech. Bd. 9 (1929) S. 173.

zeitig, aber unabhängig voneinander nach einer anderen Lösung gesucht, die von einer Integralgleichung ausgeht. Während Nußelt[3]) die Integralgleichung[4]) durch eine Reihenentwicklung exakt gelöst hat, hat der Verfasser das im nachstehenden beschriebene, als Wärmepolmethode bezeichnete Näherungsverfahren ausgearbeitet, das erheblich rascher zum Ziele führt als die exakten Methoden und bei genügender Verfeinerung jeden gewünschten Genauigkeitsgrad erreichen läßt. Die Berechnungen[5]) lassen sich hierbei noch vereinfachen, wenn man sie zum Teil durch ein graphisches Verfahren ersetzt, das seiner Einfachheit wegen zuerst behandelt werden soll.

Annahmen. Die Berechnungen sollen unter folgenden Annahmen durchgeführt werden:

1. Die Wärmeleitzahl der Speichermasse sei senkrecht zur Strömungsrichtung der Gase unendlich groß, in der Längsrichtung hingegen unendlich klein. Dies läßt sich durch eine sehr feine Unterteilung der Speichermasse angenähert verwirklichen, insbesondere, wenn man Metalle als Speichermasse anwenden kann.
2. Zwischen zwei aufeinanderfolgenden Umschaltungen trete das Gas mit zeitlich unveränderlicher Temperatur und Geschwindigkeit in den Regenerator ein.
3. Die Wärmeübergangszahl zwischen Gas und Speichermasse habe in jeder solchen Periode an allen Stellen des Regenerators denselben unveränderlichen Wert.

Die Differentialgleichungen. Das eine der beiden Gase, das wir uns im folgenden als das kältere vorstellen wollen, durchströme den Regenerator in wagrechter Richtung von links nach rechts. Dann bedeute

- x die Entfernung des betrachteten Regeneratorquerschnittes vom linken Regeneratorende,
- z die Zeit seit Beginn des Einströmens des Gases (nach dem letzten Umschalten),
- α die Wärmeübergangszahl zwischen dem Gas und der Speichermasse,
- H die wärmeübertragende Oberfläche („Heizfläche") der Speichermasse je m Regeneratorlänge,
- C die Wärmekapazität der Speichermasse je m Regeneratorlänge,
- V die in der Zeiteinheit durchströmende Gasmenge in cbm/h, gemessen in einem beliebigen Normalzustand,
- c_p die spezifische Wärme von 1 cbm Gas,
- t die Temperatur der Speichermasse,
- ϑ die Gastemperatur.

Führen wir zur Vereinfachung die „reduzierte Länge" $\xi = \frac{\alpha \cdot H}{V \cdot c_p} \cdot x$ und die „reduzierte Zeit" $\eta = \frac{\alpha \cdot H}{C} \cdot z$ ein, so ist die Temperatur der Speichermasse und des Gases an einer beliebigen Regeneratorstelle x bzw. ξ und zu einer beliebigen Zeit z bzw. η durch folgende Differentialgleichungen bestimmt[6]):

$$\left(\frac{\partial \vartheta}{\partial \xi}\right)_\eta = t - \vartheta \quad \ldots \ldots \quad (1),$$

$$\left(\frac{\partial t}{\partial \eta}\right)_\xi = \vartheta - t \quad \ldots \ldots \quad (2).$$

Diese Differentialgleichungen sollen im nachstehenden näherungsweise gelöst werden. Hierbei sind folgende zwei Grenzbedingungen zu beachten.

Grenzbedingungen. Der Temperaturmaßstab sei so gewählt, daß das kalte Gas von links mit der Temperatur $\vartheta = 0$, das warme Gas von rechts mit der Temperatur $\vartheta = 2\Theta_1$ eintritt. Ferner sei L die gesamte Regeneratorlänge und Z die Periodendauer, die praktisch gleich der Zeitdauer zwischen zwei aufeinanderfolgenden Umschaltungen gesetzt werden kann, oder im reduzierten Maße ausgedrückt:

---

[3]) W. Nußelt, Z. d. Ver. deutscher Ing. Bd. 72 (1928) S. 1052.

[4]) Die Integralgleichungen für den allgemeinsten Fall mit endlicher Wärmeleitzahl der Speichermasse und eine Näherungslösung zur Berechnung der zeitlichen Mittelwerte der Gastemperaturen hat Schmeidler angegeben; siehe W. Schmeidler, Z. f. ang. Math. u. Mech. Bd. 8 (1928) S. 385. — Außerdem wurden verschiedene mehr elementare Berechnungsverfahren veröffentlicht; vgl. vor allem A. Schack, Arch. f. Eisenhüttenwesen 2 (1929) S. 481; Stahl und Eisen 49 (1929) S. 140; Z. f. techn. Physik 9 (1928) S. 390; O. Rummel und A. Schack, Stahl u. Eisen 49 (1929) S. 1300; J. Seigle, Génie civil 92 (1928) S. 34.

[5]) Die Ergebnisse der zahlenmäßigen Berechnungen sind zum größten Teil in der Zeitschrift: Technische Mechanik und Thermodynamik 1 (1930) S. 219 u. 250 veröffentlicht.

[6]) Bezüglich der Ableitung siehe H. Hausen, diese Zeitschr. a. a. O. Dort ist η noch etwas strenger definiert, doch reicht die obige Definition in allen praktischen Fällen aus. Vgl. auch A. Anzelius a. a. O.

$$\Lambda = \frac{a \cdot H}{V \cdot c_p} \cdot L \text{ die „reduzierte" Regeneratorlänge} \quad \ldots \ldots \quad (3),$$

$$\Pi = \frac{a \cdot H}{C} \cdot Z \text{ die „reduzierte" Periodendauer} \quad \ldots \ldots \quad (4).$$

Die eine Grenzbedingung besagt dann, daß das Gas während der Zeit von $\eta = 0$ bis $\eta = \Pi$ an der Stelle $\xi = 0$ mit der unveränderlichen Temperatur $\vartheta = 0$ eintritt.

Die zweite Grenzbedingung folgt aus der Überlegung, daß die Speichermasse am Ende der Kaltperiode an allen Stellen dieselben Temperaturen hat wie bei Beginn der Warmperiode. Sind Λ und Π in beiden Perioden gleich, so lautet diese zweite Grenzbedingung nach einer schon früher gegebenen Ableitung[7]) bei entgegengesetzter Strömungsrichtung der beiden Gase („Gegenstromtrieb"):

$$t(\xi, \Pi) = 2\,\Theta_1 - t(\Lambda - \xi, 0) \quad \ldots \ldots \quad (5)$$

und bei gleicher Strömungsrichtung („Gleichstrombetrieb"):

$$t(\xi, \Pi) = 2\,\Theta_1 - t(\xi, 0) \quad \ldots \ldots \quad (6).$$

Die erste Grenzbedingung sei als Anfangsbedingung, Gl. (5) oder (6) als Umschaltbedingung bezeichnet. Bei den im nachstehenden beschriebenen Näherungsverfahren soll zunächst nur die Anfangsbedingung berücksichtigt, hingegen die Temperaturverteilung zu Beginn der Periode noch offen gelassen und erst später ermittelt werden.

Graphisches Verfahren. Wir ersetzen die Differentialgleichungen (1) und (2) durch folgende Differenzengleichungen:

$$\left(\frac{\Delta \vartheta}{\Delta \xi}\right)_\eta = t_m - \vartheta_m \quad \ldots \ldots \quad (1a),$$

$$\left(\frac{\Delta t}{\Delta \eta}\right)_\xi = \vartheta_m' - t_m' \quad \ldots \ldots \quad (2a),$$

worin t_m und ϑ_m die Mittelwerte von t und ϑ im endlichen Intervall $\Delta \xi$, t_m' und ϑ_m' die entsprechenden Mittelwerte im Intervall $\Delta \eta$ bedeuten. Ist die Temperatur t der Speichermasse zu einer bestimmten Zeit η als Funktion von ξ sowie die Gastemperatur ϑ_0 zu derselben Zeit an einer einzigen Stelle ξ_0 gegeben, so läßt sich die Gastemperatur allen anderen Stellen ξ nach Gl. (1a) durch schrittweise Anwendung folgender in Abb. 1 angegebenen Konstruktion ermitteln. Um die Temperatur ϑ_1 an der Stelle $\xi_0 + \Delta \xi$ zu finden, bestimmt man zunächst durch Halbierung des Intervalles $\Delta \xi$ die mittlere Temperatur t_m der Speichermasse, zieht durch den so bestimmten Punkt eine Wagrechte bis zu dem im Abstand 1 gelegenen Punkt A und verbindet dann A mit ϑ_0. Der Schnittpunkt dieser Verbindungslinie

Abb. 1. Zeichnerische Bestimmung der Gastemperatur.

Abb. 2. Zeichnerische Bestimmung der Temperatur der Speichermasse.

Abb. 3. Gleichzeitige Bestimmung der Temperaturen des Gases und der Speichermasse.

[7]) H. Hausen, diese Zeitschrift a. a. O. Die etwas andere Gestalt der dort angegebenen Gleichungen ist durch die verschiedene Wahl des Koordinatensystems bedingt.

mit der Senkrechten an der Stelle $\xi_0 + \Delta\xi$ ergibt die gesuchte Temperatur ϑ_1. Diese Konstruktion befriedigt Gl. (1a), weil die beiden umrandeten Dreiecke einander ähnlich sind.

Nach Gl. (2a) läßt sich durch eine entsprechende Konstruktion (Abb. 2) an einer bestimmten Stelle ξ die Temperatur t' der Speichermasse zu verschiedenen Zeiten η schrittweise ermitteln, wenn die Gastemperatur ϑ' als Funktion von η und ein einziger Wert von $t' = t_0'$ zur Zeit η_0 gegeben ist. Durch Halbieren des Intervalls $\Delta\eta$ wird ϑ_m' und der im Abstand 1 gelegene Punkt B und durch Verbinden von B mit t_0' die unbekannte Temperatur t_1' an der Stelle $\eta_0 + \Delta\eta$ bestimmt.

Bei der praktischen Ausführung müssen die beiden Konstruktionen meist abwechselnd angewendet werden, wie es in Abb. 3 veranschaulicht ist. Die Temperatur t_{I} der Speichermasse zur Zeit η_0 sowie die zur gleichen Zeit gehörige Gastemperatur ϑ_{I} seien als Funktion von ξ bekannt, ferner sei der Verlauf der beiden Temperaturen zur Zeit $\eta_0 + \Delta\eta$, die im Diagramm mit t_{II} und ϑ_{II} bezeichnet sind, bis zur Stelle ξ_0 vorgegeben, wo sie die Werte t_0

Abb. 4. Erste Abkühlung der Speichermasse.

Abb. 5. Temperatur des Gases bei der ersten Abkühlung der Speichermasse.

Abb. 6. Vergleich der zeichnerisch ermittelten Gastemperatur mit der errechneten. (Die Kreise geben die errechnete Temperatur an.)

und ϑ_0 haben. An der Stelle $\xi + \Delta\xi$ sind jetzt die beiden Temperaturen ϑ_1 und t_1 zur Zeit $\eta_0 + \Delta\eta$ noch unbekannt. Um zunächst ϑ_1 zu ermitteln, bestimmen wir zuerst t_m durch Extrapolation der Kurve t_{II} bis zur Stelle $\xi_0 + \frac{\Delta\xi}{2}$ und wenden dann die in Abb. 1 angegebene Konstruktion an, wie es durch die gestrichelten Linien in Abb. 3 gezeigt ist. Ist auf diese Weise ϑ_1 gefunden, so läßt sich auch t_1 ermitteln, indem man zunächst ϑ_m' durch Halbierung der senkrechten Strecke zwischen ϑ_1 und ϑ_0' bestimmt und dann die in Abb. 2 angegebene Konstruktion anwendet. Hierbei wird zweckmäßigerweise die in Abb. 2 dargestellte Figur in die t, ξ-Ebene um die Senkrechte $t_0' - \vartheta_m'$ umgeklappt, wie es in Abb. 3 durch die strichpunktierten Linien veranschaulicht ist. Die Verlängerung der Kurve t_{II} bis zum neu gefundenen Punkt t_1 gibt eine Kontrolle darüber, ob t_m durch die vorhergehende Extrapolation genau genug bestimmt war. Trifft dies nicht zu, so müssen die beschriebenen Konstruktionen mit dem jetzt besser bestimmten Wert von t_m wiederholt werden. Dies ist aber im allgemeinen nur erforderlich, solange von der Kurve t_{II} noch wenige Punkte bekannt sind. Durch wiederholte Anwendung dieses Verfahrens lassen sich die Kurven für t_{II} und ϑ_{II} schrittweise vervollständigen und die Kurven für immer größere Werte von η aufzeichnen[8]).

[8]) Es empfiehlt sich der Übersichtlichkeit wegen die Hilfslinien nicht durchzuziehen, sondern nur die Schnittpunkte zu markieren. Soll ferner eine größere Zahl von Kurven aufgezeichnet werden, so ist es zweckmäßig, die ϑ-Kurven nach der Benutzung aus der Konstruktionszeichnung wieder zu entfernen und auf ein besonderes Blatt zu übertragen.

In Abb. 4 und 5 sind die auf dem beschriebenen graphischem Wege ermittelten Temperaturen für den Fall dargestellt, daß das Gas an der Stelle $\xi = 0$ mit der konstanten Temperatur $\vartheta = 0$ eintritt und die Speichermasse zur Zeit $\eta = 0$ an allen Stellen die Temperatur 1 hat. Die Intervalle $\Delta\xi$ und $\Delta\eta$ wurden zu 0,2 bis 0,4 angenommen, bei starken Krümmungen der Kurven auch noch kleiner gewählt.

Daß dieses zeichnerische Verfahren sehr genau ist, geht aus Abb. 6 hervor, in der die Gastemperatur zur Zeit $\eta = 0$ für dieselben Verhältnisse wie in Abb. 5 sowohl nach der in Abb. 1 dargestellten Konstruktion als auch nach zwei von Nußelt[9]) angegebenen Methoden eingezeichnet ist, wobei stets $\Delta\xi = 0{,}4$ gewählt wurde. Die nach der Methode des Verfassers ermittelten Werte stimmen mit der analytisch berechneten Gastemperatur, die nach Gl. (1) durch $\vartheta = 1 - e^{-\xi}$ dargestellt wird, fast genau überein. Weitere Berechnungen haben ergeben, daß auch alle übrigen in Abb. 4 und 5 dargestellten Werte an keiner Stelle um mehr als etwa $^1/_2$ vH der Anfangstemperatur von den richtigen Werten abweichen.

Auch im Beharrungszustand des in gleichbleibenden Zeitabständen umgeschalteten Regenerators kann das beschriebene graphische Verfahren mit Vorteil benutzt werden, wenn die Temperatur der Speichermasse bei Beginn der betrachteten Periode nach einem rechnerischen Verfahren, z. B. nach der nachstehend beschriebenen Wärmepolmethode ermittelt wird. Ist jedoch der Regenerator sehr lang und wird nur selten umgeschaltet, so erfordert die schrittweise graphische Temperaturbestimmung bis zum Ende der Periode sehr viel Zeit. Man gelangt dann wesentlich rascher zum Ziel, wenn man die Temperaturen der Speichermasse durchweg nach der Wärmepolmethode berechnet und nur die zugehörigen Gastemperaturen graphisch bestimmt.

Wärmepolmethode. Die Wärmepolmethode beruht auf folgender Überlegung: Ist bei gegebener Anfangstemperaturverteilung die Endtemperaturverteilung gesucht, so findet man infolge des linearen Charakters der Differentialgleichungen diese Endtemperaturverteilung auch, indem man die Anfangstemperatur in mehrere Teile zerlegt, für jeden dieser Teile die Endtemperatur einzeln bestimmt und nachträglich die Endergebnisse addiert. Wir führen die Teilung so durch, daß wir uns ein Diagramm, in dem die Temperatur der Speichermasse als Funktion von ξ aufgetragen ist (vgl. Abb. 7), in eine beliebige Anzahl N senkrechter Streifen gleicher Breite $\Delta\varepsilon$ zerlegt denken. Die Mittelwerte der Anfangstemperatur in diesen Streifen seien $f_1, f_2, f_3, \ldots . f_N$. Ein einzelner solcher Streifen von der Höhe 1 (Anfangstemperatur 1) und der Breite $\Delta\varepsilon$ zwischen den Stellen $\xi = \varepsilon$ und $\xi = \varepsilon + \Delta\varepsilon$ (Abb. 8) sei als Wärmepol bezeichnet[10]). Unter Wärmepol verstehen wir somit eine Konzentration von Wärme an eine eng begrenzte Stelle, während außerhalb dieser Stelle die Temperatur $t = 0$ beträgt.

Abb. 7. Aufteilung des Regenerators in Stücke gleicher Länge.

Abb. 8. Wärmepol.

Abb. 9. Wärmepolfunktion (schematisch).

Strömt nun durch einen Regenerator mit einer der Abb. 8 entsprechenden Temperaturverteilung von links das Gas mit der Eintrittstemperatur $\vartheta = 0$ hindurch, so wird die Stelle mit dem Wärmepol allmählich abgekühlt und ihre Wärme auf die anschließende Regeneratormasse übertragen. Nach Verlauf einer gewissen Zeit η stellt sich in der Speichermasse eine Temperaturverteilung etwa wie in Abb. 9 ein, die als Wärmepolfunktion Δy zur Zeit η bezeichnet sei. Der Wert dieser Funktion, deren Berechnung später gezeigt wird, hängt ab von der Polbreite $\Delta\varepsilon$, von der Entfernung der betrachteten Stelle ξ vom Wärmepol und von der Zeit η. Δy_1 bis Δy_N seien die Mittelwerte dieser Funktion in den Streifen 1 bis N. Dieser Temperaturverteilung entspricht auch ein bestimmter Verlauf Δu der Gastemperatur zur Zeit η, deren Mittelwerte in den einzelnen Streifen mit $\Delta u_1, \Delta u_2, \Delta u_3 \ldots \Delta u_N$ bezeichnet seien[11]).

---

9) W. Nußelt, Zeitschrift des Vereines deutscher Ingenieure. Bd. 71 (1927) S. 85.

10) Diese Bezeichnungsweise ist in der Theorie der partiellen Differentialgleichungen üblich, doch werden dort die Wärmepole unendlich hoch und unendlich schmal angenommen.

11) Δy und Δu werden für lim $\Delta\varepsilon = 0$ unendlich klein. Der Grenzwert $\lim\limits_{\Delta\varepsilon=0}\left(\frac{\Delta y}{\Delta\varepsilon}\right)$ stellt die in der Theorie der partiellen Differentialgleichungen benutzte Greensche Einflußfunktion dar.

Nach Kenntnis der Wärmepolfunktion kann man nun leicht angeben, welchen Einfluß jeder der Streifen in Abb. 7 auf die Endtemperaturverteilung zur Zeit η hat. Da man z. B. in Streifen 1 die vorgegebene mittlere Anfangstemperatur f_1 erhält, wenn man einen dort angeordneten Wärmepol mit f_1 multipliziert, so ist der Einfluß dieses 1. Streifens auf die Endtemperatur der Speichermasse in den N Streifen:

$$f_1 \cdot \Delta y_1,\ f_1 \cdot \Delta y_2,\ f_1 \cdot \Delta y_3 \ldots\ldots f_1 \cdot \Delta y_N .$$

Entsprechend ergibt sich als Einfluß des 2. Streifens auf die Endtemperatur in den N Streifen

$$0,\ f_2 \cdot \Delta y_1,\ f_2 \cdot \Delta y_2 \ldots\ldots f_2 \cdot \Delta y_{N-1} .$$

Bestimmt man in derselben Weise auch die Einflüsse der übrigen Streifen, so erhält man durch Addition aller Einflüsse folgende Endtemperaturen:

für die Speichermasse

$$\left.\begin{array}{lll} 1.\ \text{Streifen}: & t_1 = f_1 \cdot \Delta y_1 \\ 2.\quad ,, & : t_2 = f_1 \cdot \Delta y_2 + f_2 \cdot \Delta y_1 \\ 3.\quad ,, & : t_3 = f_1 \cdot \Delta y_3 + f_2 \Delta y_2 + f_3 \cdot \Delta y_1 \\ N_{\text{ter}}\quad ,, & : t_N = f_1 \cdot \Delta y_N + f_2 \Delta y_{N-1} + f_3 \Delta y_{N-2} + \ldots . f_N \cdot \Delta y_1 \end{array}\right\} \ldots\ldots (7)$$

und entsprechend für das Gas

$$\left.\begin{array}{lll} 1.\ \text{Streifen}: & \vartheta_1 = f_1 \cdot \Delta u_1 \\ 2.\quad ,, & : \vartheta_2 = f_1 \cdot \Delta u_2 + f_2 \cdot \Delta u_1 \\ 3.\quad ,, & : \vartheta_3 = f_1 \cdot \Delta u_3 + f_2 \cdot \Delta u_2 + f_3 \cdot \Delta u_1 \\ N_{\text{ter}}\quad ,, & : \vartheta_N = f_1 \cdot \Delta u_N + f_2 \Delta u_{N-1} + f_3 \Delta u_{N-2} + \ldots . f_N \cdot \Delta u_1 \end{array}\right\} \ldots\ldots (8).$$

Ist also die Wärmepolfunktion Δy und die zugehörige Gastemperatur Δu für den gewünschten Wert von η bekannt, so erhält man nach Gl. (7) und (8) für jede beliebige Anfangstemperaturverteilung sehr rasch die Endtemperaturverteilung. Durch Erhöhung der Zahl der Wärmepole läßt sich hierbei jede gewünschte Genauigkeit erreichen.

Abb. 10. Wärmepolfunktion Δy für einen Wärmepol von der Breite 1.

Abb. 11. Gastemperatur Δu für einen Wärmepol von der Breite 1.

Berechnung der Wärmepolfunktion. Die Wärmepolfunktion Δy und die zugehörige Gastemperatur Δu können nach dem oben beschriebenen graphischen Verfahren aus der Anfangstemperatur des Wärmepoles (Abb. 8) ermittelt werden. Einfacher erhält man sie wie folgt aus Abb. 4 und 5. Es entsteht ein Wärmepol zwischen $\xi = \varepsilon = 0$ und $\xi = \Delta \varepsilon$, wenn man von der bei $\xi = 0$ beginnenden konstanten Anfangstemperatur 1 dieselbe um $\Delta \varepsilon$ nach rechts verschobene Anfangstemperatur, die also bis $\xi = \Delta \varepsilon$ den Wert Null und erst von hier ab den Wert 1 hat, subtrahiert. Man erhält daher auch die Wärmepolfunktion für eine spätere Zeit η, indem man die aus Abb. 4 für η sich ergebende und um $\Delta \varepsilon$ nach rechts verschobene Endtemperatur von derselben nicht verschobenen Endtemperatur subtrahiert. Bezeichnen wir diese Endtemperatur mit $t(\xi)$ und die zugehörige Gastemperatur mit $\vartheta(\xi)$, so folgt hiernach für $\xi \geqq \Delta \varepsilon$

$$\Delta y = t(\xi) - t(\xi - \Delta \varepsilon) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (9)$$

$$\Delta u = \vartheta(\xi) - \vartheta(\xi - \Delta \varepsilon) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (10),$$

hingegen für $\xi < \Delta\varepsilon$

$$\Delta y = t(\xi) \quad (11)$$

$$\Delta u = \vartheta(\xi) \quad (12).$$

Abb. 10 und 11 zeigen die so ermittelten Funktionen Δy und Δu für einen Wärmepol von der Breite 1.

Bei größeren Werten von η ist folgende rein rechnerische Ermittlung der Wärmepolfunktion vorzuziehen. Wie Anzelius[12] gezeigt hat, haben die Differentialgleichungen (1) und (2) unter der Annahme, daß das Gas von links mit der Temperatur $\vartheta = 0$ eintritt und die Anfangstemperatur $f(\xi) = 1$ beträgt, die Lösung:

$$t - \vartheta = e^{-(\xi+\eta)} \cdot J_0(2\,i\sqrt{\xi\,\eta}) \quad (13),$$

worin J_0 die Besselsche Funktion 1. Art 0ter Ordnung und i die imaginäre Einheit bedeutet. Durch partielle Differentiation von (13) nach ξ und Vergleich mit Gl. (1) folgt

$$\left(\frac{\partial t}{\partial \xi}\right)_\eta = -e^{-(\xi+\eta)}\sqrt{\frac{\eta}{\xi}} \cdot i \cdot J_1(2\,i\sqrt{\xi\,\eta}) \quad (14),$$

worin J_1 die Besselsche Funktion 1. Ordnung bedeutet. Für große Werte des Produktes $\xi\,\eta$ kann man statt Gl. (14) unter Benutzung der Reihenentwicklung[13])

$$\lim_{x=\infty} J_1(i\,x) = i \cdot \frac{e^x}{\sqrt{2\pi x}}\left(1 - \frac{3}{1!\,8\,x} - \frac{3\cdot 5}{2!\,(8\,x)^2} \cdots\right)$$

auch schreiben

$$\left(\frac{\partial t}{\partial \xi}\right)_\eta = e^{-(\sqrt{\xi}-\sqrt{\eta})^2} \cdot \frac{1}{\xi}\sqrt{\frac{\sqrt{\xi\,\eta}}{4\pi}}\left(1 - \frac{0{,}188}{\sqrt{\xi\,\eta}} - \frac{0{,}0293}{\xi\,\eta}\right) \quad (15).$$

Bei $\sqrt{\xi\,\eta} = 2$ ist der Fehler dieser Formel bereits kleiner als 2 vT und nimmt mit wachsendem $\xi\,\eta$ rasch ab.

Durch Integration von (14) oder (15) kann man $t(\xi)$ und durch Einsetzen in (9) und (11) die Wärmepolfunktion bestimmen. Da sich jedoch die Gl. (14) und (15) nicht geschlossen integrieren lassen, wollen wir $t(\xi)$ zwischen einer beliebigen Stelle $\xi = \xi_0$ und der Stelle $\xi_0 + \Delta\varepsilon$ näherungsweise berechnen. Wir setzen angenähert

$$\left(\frac{\partial t}{\partial \xi}\right)_\eta = a + b(\xi - \xi_0) + c(\xi - \xi_0)^2 + d(\xi - \xi_0)^3 \quad (16)$$

und bestimmen die Konstanten a, b, c und d so, daß dieser Ausdruck an den Stellen $\xi_0 - \Delta\varepsilon$, ξ_0, $\xi_0 + \Delta\varepsilon$ und $\xi_0 + 2\Delta\varepsilon$ die aus Gl. (14) oder (15) ermittelten Werte von $\left(\frac{\partial t}{\partial \xi}\right)_\eta$ annimmt. Gl. (16) gibt dann $\left(\frac{\partial t}{\partial \xi}\right)_\eta$ auch zwischen ξ_0 und $\xi_0 + \Delta\varepsilon$ genau genug wieder, falls $\Delta\varepsilon$ nicht zu groß gewählt wird. Wir erhalten hieraus durch Integration $t(\xi)$ und als Mittelwert von $t(\xi)$ zwischen $\xi = \xi_0$ und $\xi = \xi_0 + \Delta\varepsilon$

$$t_m = \frac{1}{\Delta\varepsilon}\int_{\xi_0}^{\xi_0+\Delta\varepsilon} t(\xi)\,d\xi = t(\xi_0) + \frac{\Delta\varepsilon}{360}\left[129\,t'(\xi_0) + 66\,t'(\xi_0 + \Delta\varepsilon) - 7\,t'(\xi_0 + 2\Delta\varepsilon) - 8\,t'(\xi_0 - \Delta\varepsilon)\right] \quad (17),$$

worin $t'(\xi)$ für $\left(\frac{\partial t}{\partial \xi}\right)_\eta$ geschrieben ist. Den entsprechenden Mittelwert zwischen $\xi = \xi_0 - \Delta\varepsilon$ und $\xi = \xi_0$, der mit t_{m-1} bezeichnet sei, erhält man, indem man in Gl. (17) $\Delta\varepsilon$ durch $-\Delta\varepsilon$ ersetzt. Für $\xi_0 \geq \Delta\varepsilon$ ergibt sich daher nach Gl. (9) als Mittelwert der Wärmepolfunktion zwischen ξ_0 und $\xi_0 + \Delta\varepsilon$

$$\Delta y_m = t_m - t_{m-1} = \frac{\Delta\varepsilon}{360}\left[258\,t'(\xi_0) + 58\{t'(\xi_0 - \Delta\varepsilon) + t'(\xi_0 + \Delta\varepsilon)\} - 7\{t'(\xi_0 - 2\Delta\varepsilon) + t'(\xi_0 + 2\Delta\varepsilon)\}\right] \quad (18).$$

Legen wir die Stelle ξ_0 an den Anfang des n-ten Streifens, so erhalten wir wegen $\xi_0 = (n-1)\Delta\varepsilon$ nach (18) bei $n > 1$ als Mittelwert der Wärmepolfunktion in diesem Streifen:

$$\Delta y_n = \frac{\Delta\varepsilon}{360}\left[258\,t'((n-1)\Delta\varepsilon) + 58\{t'((n-2)\Delta\varepsilon) + t'(n\,\Delta\varepsilon)\} - 7\{t'((n-3)\Delta\varepsilon) + t'((n+1)\Delta\varepsilon)\}\right] \quad (19).$$

[12]) A. Anzelius a. a. O.

[13]) Vgl. z. B. E. Jahnke und F. Emde, Funktionentafeln, Teubner, Leipzig-Berlin 1909 S. 100.

Für sehr schmale Streifen kann man hierfür auch angenähert schreiben:

$$\Delta y_n = \Delta \varepsilon \, [0{,}7 \, t' \, ((n-1) \, \Delta \varepsilon) + 0{,}15 \, \{t' \, ((n-2) \, \Delta \varepsilon + t' \, (n \, \Delta \varepsilon)\}] \quad \ldots \ldots \quad (20).$$

Im ersten Streifen ($n = 1$) wird hingegen nach Gl. (11) der Mittelwert der Wärmepolfunktion $\Delta y_1 = t_m$ und, da für $\xi = 0$ wegen $\vartheta = 0$ nach Gl. (2) $t(0) = e^{-\eta}$ ist, nach Gl. (17)

$$\Delta y_1 = e^{-\eta} + \frac{\Delta \varepsilon}{360} [129 \, t' \, (0) + 66 \, t' \, (\Delta \varepsilon) - 7 \, t' \, (2 \, \Delta \varepsilon) - 8 \, t' \, (-\Delta \varepsilon)] \quad \ldots \ldots \quad (21).$$

Um die Mittelwerte der Wärmepolfunktion in den Streifen nach den Gl. (19) oder (20) und (21) zu ermitteln, braucht man also $t'(\xi) = \left(\frac{\partial t}{\partial \xi}\right)_\eta$ nur an den Teilstellen $\xi = 0$, $\Delta \varepsilon$, $2 \Delta \varepsilon$ usw. zu berechnen.

Die Gl. (19), (20) und (21) lassen sich auch zur Berechnung der mittleren Gastemperaturen Δu_n benutzen, indem man $\vartheta'(\xi) = \left(\frac{\partial \vartheta}{\partial \xi}\right)_\eta$ statt $t'(\xi)$ einsetzt. Es ist jedoch, wie schon erwähnt, einfacher, die Gastemperaturen aus den Temperaturen der Speichermasse graphisch zu ermitteln.

Erfüllung der Umschaltbedingung durch die Wärmepolmethode. Die für Gegenstrombetrieb geltende Umschaltbedingung (5) geht, wenn wir statt der wahren Temperaturen die Mittelwerte in den einzelnen Streifen einführen, über in die N Gleichungen

$$\left.\begin{aligned} t_1 &= 2 \, \Theta_1 - f_N \\ t_2 &= 2 \, \Theta_1 - f_{N-1} \\ t_N &= 2 \, \Theta_1 - f_1 \end{aligned}\right\} \quad \ldots \ldots \quad (22),$$

worin f_1, f_2 usw. die Temperaturen der Speichermasse zu Beginn, t_1, t_2 usw. am Ende der Kaltperiode bedeuten. Setzen wir t_1 bis t_N aus den Gl. (7), worin sich jetzt Δy_1 usw. ebenfalls auf das Ende der Kaltperiode beziehen sollen, in (22) ein, so erhalten wir

$$\left.\begin{aligned} &\Delta y_1 f_1 && + f_N &&= 2 \, \Theta_1 \\ &\Delta y_2 f_1 + \Delta y_1 f_2 && + f_{N-1} &&= 2 \, \Theta_1 \\ &\Delta y_N f_1 + \Delta y_{N-1} f_2 + \ldots\ldots \Delta y_1 f_N && + f_1 &&= 2 \, \Theta_1 \end{aligned}\right\} \quad \ldots \ldots \quad (23).$$

Die Auflösung dieser Gleichungen liefert die gesuchten Anfangstemperaturen f_1, f_2 usw. in der Kaltperiode.

Ähnlich gestaltet sich die Berechnung bei Gleichstrombetrieb, wofür die Umschaltbedingung entsprechend Gl. (6) lautet:

$$\left.\begin{aligned} t_1 &= 2 \, \Theta_1 - f_1 \\ t_2 &= 2 \, \Theta_1 - f_2 \\ t_N &= 2 \, \Theta_1 - f_N \end{aligned}\right\} \quad \ldots \ldots \quad (24).$$

Durch Einsetzen von (7) in (24) ergeben sich zur Bestimmung der Anfangstemperatur folgende Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned} &(1 + \Delta y_1) f_1 &&= 2 \, \Theta_1 \\ &\Delta y_2 \, f_1 + (1 + \Delta y_1) f_2 &&= 2 \, \Theta_1 \\ &\Delta y_3 \, f_1 + \Delta y_2 f_2 + (1 + \Delta y_1) f_3 &&= 2 \, \Theta_1 \\ &\Delta y_N \, f_1 + \Delta y_{N-1} \, f_2 + \ldots\ldots \Delta y_2 \, f_{N-1} + (1 + \Delta y_1) \, f_N &&= 2 \, \Theta_1 \end{aligned}\right\} \quad \ldots \ldots \quad (25).$$

Die Wärmepolmethode läßt sich auch dann anwenden, wenn die Werte von Λ und Π in der Warm- und Kaltperiode verschieden sind. Man läßt in diesem Falle die Werte von f_1, f_2 usw. zunächst noch offen, betrachtet die aus Gl. (7) folgenden Ausdrücke für die Endtemperaturen der Kaltperiode als die Anfangstemperaturen der Warmperiode und wendet hierauf Gl. (7) mit den entsprechend geänderten Werten der Wärmepolfunktion nochmals an. Setzt man die so gewonnenen Ausdrücke für die Endtemperaturen der Warmperiode den Anfangstemperaturen der Kaltperiode gleich, so ergeben sich die Bestimmungsgleichungen für die Unbekannten f_1, $f_2 \ldots\ldots$ bis f_N.

Auch die Änderungen der Anfangstemperatur von Periode zu Periode vor Erreichung des Beharrungszustandes lassen sich nach der Wärmepolmethode berechnen, indem man ausgehend von der Temperatur der Speichermasse im Augenblick der Inbetriebsetzung die Gl. (7) abwechselnd auf die Kalt- und Warmperiode anwendet.

Zusammenhang der Wärmepolmethode mit der Theorie der Integralgleichungen. Wie schon in der Einleitung erwähnt, kann man die Berechnung der Anfangstemperatur einer Periode im Beharrungszustand nach der Wärmepolmethode als die näherungsweise Auflösung einer Integralgleichung betrachten. Man erhält diese Integralgleichung wie folgt beim Übergang zu unendlich schmalen Wärmepolen. Für einen unendlich schmalen Wärmepol an der Stelle $\xi = \varepsilon$ von der Breite $d\varepsilon$ hat die Wärmepolfunktion an einer beliebigen anderen Stelle ξ nach Gl. (9), in der jetzt $\xi - \varepsilon$ statt ξ zu setzen ist, den Wert

$$d\,y = t'(\xi - \varepsilon) \cdot d\,\varepsilon.$$

Wir erhalten daher, wenn $f(\varepsilon)$ die Anfangstemperatur an der Stelle ε bedeutet, entsprechend Gl. (7) für die Endtemperatur

$$t(\xi) = \int_0^\xi f(\varepsilon)\,d\,y = \int_0^\xi f(\varepsilon) \cdot t'(\xi - \varepsilon)\,d\,\varepsilon \quad \text{. . . . . (26),}$$

worin für $t'(\xi - \varepsilon)$ nach Gl. (14) der Ausdruck

$$t'(\xi - \varepsilon) = -e^{-(\xi - \varepsilon + \eta)} \sqrt{\frac{\eta}{\xi - \varepsilon}}\, i\,J_1\left(2\,i\sqrt{(\xi - \varepsilon)\,\eta}\right) \quad \text{. . . . . (27)}$$

einzusetzen ist. Bezeichnen wir auch in der Umschaltbedingung die Anfangstemperatur in der Kaltperiode mit $f(\xi)$, die Endtemperatur mit $t(\xi)$, so gehen die Gl. (4) und (5) über in

$$t(\xi) = 2\,\Theta_1 - f(\Lambda - \xi) \quad \text{oder} \quad t(\xi) = 2\,\Theta_1 - f(\xi).$$

Setzt man in diese Gleichungen $t(\xi)$ aus (26) ein, so ergibt sich folgende Integralgleichung:

$$\left.\begin{array}{l} \text{Gegenstrombetrieb: } f(\Lambda - \xi) \\ \text{Gleichstrombetrieb: } f(\xi) \end{array}\right\} + \int_0^\xi f(\varepsilon)\,t'(\xi - \varepsilon)\,d\,\varepsilon = 2\,\Theta_1 \left\{\begin{array}{l} \text{. . . . . (28),} \\ \text{. . . . . (29).} \end{array}\right.$$

Diese Integralgleichung, durch deren Auflösung man $f(\xi)$ findet, entspricht vollständig den Summengleichungen (23) und (25). Man kann daher umgekehrt die Wärmepolmethode auch in der Weise begründen, daß man zuerst die Gl. (26), (28) und (29) aufstellt und dann die darin enthaltenen Integrale durch den Übergang von $d\,\varepsilon$ zu $\Delta\,\varepsilon$ in Summen überführt.

Als exakte Lösung der Integralgleichung gibt Nußelt[14]) eine unendliche Reihe von Integralausdrücken an, deren Einzelwerte jedoch nur durch Näherungsrechnung ermittelt werden können. Es ist daher einfacher, von vornherein das durch die Wärmepolmethode gegebene Näherungsverfahren anzuwenden.

Berechnung des Wirkungsgrades nach der Wärmepolmethode. Sind die Anfangstemperaturen $f_1, f_2 \ldots . f_N$ in der Kaltperiode ermittelt, so ergibt sich die Endtemperatur im $n$ten Streifen nach Gl. (22) oder (24) zu

$$t_n = 2\,\Theta_1 - \left\{\begin{array}{ll} f_{N+1-n} & \text{bei Gegenstrombetrieb} \\ f_n & \text{bei Gleichstrombetrieb} \end{array}\right\} \quad \text{. . . . . (30).}$$

Während der Kaltperiode gibt daher die Speichermasse im $n$ten Streifen an das Gas folgende Wärmemenge ab:

$$\Delta Q = C \cdot \frac{L}{N}\,[f_n - t_n] = C \cdot \frac{L}{N}\left[f_n - 2\,\Theta_1 + \left\{\begin{array}{l} f_{N+1-n} \\ f_n \end{array}\right\}\right] \quad \text{. . . . . (31).}$$

Die im ganzen Regenerator während der Kaltperiode ausgetauschte Wärmemenge beträgt somit

$$Q = \sum_{n=1}^{N} \Delta\,Q = C \cdot L\left[\frac{1}{N}\sum \frac{f_n}{\Theta_1} - 1\right] \cdot 2\,\Theta_1 \quad \text{. . . . . (32).}$$

Bei vollkommenem Wärmeaustausch würde sich das Gas im Regenerator von $\vartheta = 0$ bis $\vartheta = 2\,\Theta_1$ erwärmen. Die in diesem Idealfall übertragene Wärmemenge beträgt

$$Q_{id} = V \cdot c_p \cdot Z \cdot 2\,\Theta_1 \quad \text{. (33).}$$

Versteht man unter Wirkungsgrad das Verhältnis der im Regenerator wirklich ausgetauschten Wärmemenge zu der im Idealfall ausgetauschten, so erhalten wir nach (32) und (33) unter Berücksichtigung von (3) und (4) als Wirkungsgrad des Regenerators

[14]) W. Nußelt, Z. d. Ver. deutscher Ing. (1928) S. 1052.

$$\eta_{\text{Reg}} = \frac{\Lambda}{\Pi}\left[\frac{1}{N}\sum_{1}^{N}\frac{f_n}{\Theta_1} - 1\right] \quad \ldots \quad (34).$$

Daß Gl. (34) auch bei einer geringen Streifenzahl schon recht genaue Werte für den Wirkungsgrad liefert, zeigt folgende für $\Lambda = 10$ und $\Pi = 10$ bei Gegenstrombetrieb durchgeführte Rechnung:

Zahl der Streifen N	Polbreite $\Delta\varepsilon$	Wirkungsgrad η_{Reg}	Abweichung vom Wert bei $N = 10$
1	10	0,697	5,4 vH
2	5	0,725	1,6 vH
5	2	0,736	0,1 vH
10	1	0,737	—

Zusammenfassung. Zur Berechnung des zeitlich veränderlichen Temperaturverlaufs in Regeneratoren werden ein graphisches und ein rechnerisches Näherungsverfahren entwickelt. Während das graphische Verfahren aus den Differentialgleichungen des Regeneratorvorganges durch den Übergang von Differentialen zu endlichen Differenzen erhalten wird, wird bei dem als Wärmepolmethode bezeichneten rechnerischen Verfahren ein Integral durch eine Summe von endlichen Einflüssen, die von den näher definierten „Wärmepolen" herrühren, ersetzt. Bei Anwendung auf den Beharrungszustand liefert die Wärmepolmethode, die in diesem Falle als Näherungslösung einer Integralgleichung erscheint, auch den Temperaturverlauf bei Beginn jeder Umschaltperiode und eine einfache Formel zur Berechnung des Wirkungsgrades. Bei Zahlenrechnungen, die grundsätzlich beliebig genau durchgeführt werden können, kommt man am raschesten zum Ziel, wenn man die Wärmepolmethode in Verbindung mit dem graphischen Verfahren anwendet. 69

Über das Navigationsproblem bei ruhender oder veränderlicher Windverteilung.

Von *E. Zermelo* in Freiburg i. Br.

In meinem Prager Vortrage „Über die Navigation in der Luft als Problem der Variationsrechnung" (Deutsche Mathematiker-Vrgg. Bd. 39, S. 44—48) habe ich das folgende Problem gestellt und gelöst: *In einer unbegrenzten Ebene, in welcher die Windverteilung durch ein Vektorfeld als Funktion von Ort und Zeit gegeben ist, bewegt sich ein Fahrzeug mit konstanter Eigengeschwindigkeit relativ zur umgebenden Luftmasse. Wie muß das Fahrzeug gesteuert werden, um in kürzester Zeit von einem Ausgangspunkte zu einem gegebenen Ziel zu gelangen?*

Da in der angegebenen Mitteilung die Darstellung etwas knapp gehalten war und in einigen Punkten noch der Ergänzung und Berichtigung bedarf, so möchte ich hier die ganze Entwicklung in erweiterter und verbesserter Form wiederholen, um das Problem in voller Allgemeinheit zu behandeln.

§ 1. Die Differentialgleichungen des Problems.

Bezeichnen wir mit t die Zeit, mit x, y die rechtwinkligen Koordinaten des bewegten Fahrzeugs, mit u, v die an der Eigengeschwindigkeit gemessenen entsprechenden Windkomponenten, die als Funktionen von x, y, t gegeben sein sollen, und mit φ die „Steuerrichtung", d. h. den Winkel, den der Vektor der Relativbewegung mit der x-Richtung bildet, so ergeben sich zunächst für jede „steuerbare" Bahn die immer gültigen „Steuergleichungen"

$$\frac{dx}{dt} = u + \cos\varphi, \quad \frac{dy}{dt} = v + \sin\varphi \quad \ldots \quad (1).$$

Diese Differentialgleichungen bestimmen eindeutig die Bewegung von einem Ausgangspunkt des Windfeldes, wenn die (willkürliche) Steuerrichtung φ als Funktion der Zeit gegeben ist, und die Bestimmung dieser Funktion $\varphi = \varphi(t)$ ist die eigentliche Aufgabe des Variationsproblems. Gemäß den Methoden der Variationsrechnung gehen wir von einer Bahn $x = x(t)$,

$y = y(t)$, $\varphi = \varphi(t)$ zu einer durch einen Parameter a charakterisierten Schar von „steuerbaren“ Bahnen über

$$x = x(t, a), \quad y = y(t, a), \quad \varphi = \varphi(t, a)$$

und erhalten aus (1) durch „Variation“, d. h. durch partielle Differentiation nach a

$$\left.\begin{aligned} \frac{d}{dt}\frac{\partial x}{\partial a} &= \frac{\partial}{\partial a}\frac{dx}{dt} = u_x \frac{\partial x}{\partial a} + u_y \frac{\partial y}{\partial a} - \sin\varphi \frac{\partial \varphi}{\partial a} \\ \frac{d}{dt}\frac{\partial y}{\partial a} &= \frac{\partial}{\partial a}\frac{dy}{dt} = v_x \frac{\partial x}{\partial a} + v_y \frac{\partial y}{\partial a} + \cos\varphi \frac{\partial \varphi}{\partial a} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2),$$

wo mit dem Zeichen d immer die partielle Differentiation nach t (bei konstantem a) bezeichnet wird. Durch Einführung zweier noch zu bestimmender Multiplikatoren $\lambda = \lambda(t)$, $\mu = \mu(t)$ erhalten wir weiter

$$\left.\begin{aligned} \frac{d}{dt}\left(\lambda \frac{\partial x}{\partial a} + \mu \frac{\partial y}{\partial a}\right) &= \left(\frac{d\lambda}{dt} + u_x \lambda + v_x \mu\right)\frac{\partial x}{\partial a} + \left(\frac{d\mu}{dt} + u_y \lambda + v_y \mu\right)\frac{\partial y}{\partial a} + (-\lambda \sin\varphi + \mu\cos\varphi)\frac{\partial \varphi}{\partial a} \\ &= (-\lambda\sin\varphi + \mu\cos\varphi)\frac{\partial\varphi}{\partial a}, \end{aligned}\right\} \quad (3),$$

wenn wir die Funktionen $\lambda(t)$, $\mu(t)$ so wählen, daß

$$\left.\begin{aligned} \frac{d\lambda}{dt} + u_x \lambda + v_x \mu = 0 \\ \frac{d\mu}{dt} + u_y \lambda + v_y \mu = 0 \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (4).$$

Diese beiden linearen und homogenen Differentialgleichungen bestimmen λ und μ, wenn x, y und φ als Funktionen der Zeit gegeben sind, mit zwei willkürlichen Konstanten in der Form

$$\lambda = c_1 \lambda_1 + c_2 \lambda_2, \quad \mu = c_1 \mu_1 + c_2 \mu_2 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (5).$$

Diese Konstanten wollen wir nun so wählen, daß die rechte Seite der Gl. (3) ein Quadrat wird, indem wir setzen

$$\frac{\partial\varphi}{\partial a} = -\lambda\sin\varphi + \mu\cos\varphi = \omega \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (6).$$

Wie muß aber eine Funktion $\omega(t)$ beschaffen sein, um unter den gegebenen Bedingungen eine „erlaubte Variation“ $\frac{\partial\varphi}{\partial a}$ der Steuerrichtung für eine bestimmte „Grundbahn“ $a = \bar{a}$, $x = \bar{x}(t)$, $y = \bar{y}(t)$, $\varphi = \bar{\varphi}(t)$ darzustellen? Die variierenden Bahnen der Schar a sollen alle gleichzeitig mit der Grundbahn für $t = t_1 = \text{const}$ vom Punkte 1 ausgehen, um dann (früher oder später) zur Zeit $t = \tau(a)$ im Zielpunkte 2 einzumünden, wobei sie in ihrem ganzen Verlaufe überall den „Steuergleichungen“ (1) genügen müssen. Durch Differentiation nach a finden wir

$$\frac{\partial x}{\partial a} = \frac{\partial y}{\partial a} = 0 \text{ für } t = t_1 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (7)$$

und

$$\frac{\partial x}{\partial a} + \frac{\partial x}{\partial t}\cdot\frac{d\tau}{da} = \frac{\partial y}{\partial a} + \frac{\partial y}{\partial t}\cdot\frac{d\tau}{da} = 0 \text{ für } t = \tau(a) \quad \ldots\ldots\ldots \quad (8),$$

und dies gilt für alle Werte a, insbesondere auch für $a = \bar{a}$, der unserer Grundbahn entspricht. Hier sind die Ausdrücke $\frac{\partial x}{\partial t} = \bar{x}'$, $\frac{\partial y}{\partial t} = \bar{y}'$ die (tatsächlichen) Geschwindigkeitskomponenten der Grundbahn, während die „Variationen“ $\frac{\partial x}{\partial a}$, $\frac{\partial y}{\partial a}$ für $a = \bar{a}$ zur Abkürzung mit $\xi(t)$, $\eta(t)$ bezeichnet werden sollen. Dann erhalten wir als „Grenzbedingungen“ für ξ und η aus (7) und (8) die folgenden

$$\xi(t_1) = \eta(t_1) = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (7'),$$

$$\xi(t_2) + \bar{x}_2{}'\frac{d\tau}{da} = \eta(t_2) + \bar{y}_2{}'\frac{d\tau}{da} = 0 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (8')$$

und hieraus

$$\bar{y}_2{}'\,\xi(t_2) - \bar{x}_2{}'\,\eta(t_2) = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (8'').$$

Außerdem müssen die Funktionen $\xi(t)$, $\eta(t)$ zusammen mit $\omega = \frac{\partial \varphi}{\partial a}$ (für $a = \bar{a}$) im ganzen Intervall (t_1, t_2) den linearen, nicht homogenen Differentialgleichungen (2) genügen in der Form

$$\left.\begin{aligned} \frac{d\xi}{dt} - \bar{u}_x \xi - \bar{u}_y \eta &= -\omega \sin\bar{\varphi} \\ \frac{d\eta}{dt} - \bar{v}_x \xi - \bar{v}_y \eta &= \omega \cos\bar{\varphi} \end{aligned}\right\} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (2')$$

und bestimmen sich eindeutig aus ihnen durch ω mit den Anfangsbedingungen (7′). Sie erfüllen aber nicht von selbst die weitere Grenzbedingung (8″), sondern nur, wenn ω passend gewählt ist. Setzen wir aber gemäß (6) und (5)

$$\omega = -\lambda \sin\bar{\varphi} + \mu \cos\bar{\varphi} = c_1(-\lambda_1 \sin\bar{\varphi} + \mu_1 \cos\bar{\varphi}) + c_2(-\lambda_2 \sin\bar{\varphi} + \mu_2 \cos\bar{\varphi}) = c_1\omega_1 + c_2\omega_2,$$

so ergeben sich entsprechend

$$\xi = c_1\xi_1 + c_2\xi_2, \quad \eta = c_1\eta_1 + c_2\eta_2,$$

und (8″) kann durch geeignete nicht verschwindende c_1, c_2 erfüllt werden. Diese Bedingungen (2′), (7′), (8″) sind aber, wie aus den Existenzsätzen für partielle Differentialgleichungen geschlossen werden kann, auch hinreichend für die Existenz einer Schar $x = x(t, a)$, $y = y(t, a)$, die den Differentialgleichungen (1) nebst den Grenzbedingungen genügt und sich für $a = \bar{a}$ auf die Grundbahn $x = \bar{x}(t)$, $y = \bar{y}(t)$ reduziert. So ergibt sich aus (3) und (6) mit Hilfe von (7′) und (8′)

$$\int_{t_1}^{t_2} (-\lambda \sin\bar{\varphi} + \mu \cos\bar{\varphi})^2 \, dt = \left[\lambda \frac{\partial x}{\partial a} + \mu \frac{\partial y}{\partial a}\right]_{t_1}^{t_2} = -\frac{d\tau}{da}(\lambda(t_2)\bar{x}_2' + \mu(t_2)\bar{y}_2') = 0 \quad . \quad (9),$$

falls die untersuchte Grundbahn $\bar{x}(t)$, $\bar{y}(t)$, $\bar{\varphi}(t)$ wirklich ein Extremum der Fahrtdauer liefert und daher $\frac{d\tau}{da} = 0$ ist. In diesem Falle muß aber im ganzen Intervall gelten

$$-\lambda \sin\varphi + \mu \cos\varphi = 0 \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (10)$$

(mit Weglassung der jetzt unnötigen Querstriche), oder

$$\lambda = \varrho \cos\varphi, \quad \mu = \varrho \sin\varphi, \quad \frac{\mu}{\lambda} = \operatorname{tg}\varphi, \quad \varrho = \lambda \cos\varphi + \mu \sin\varphi \quad \ldots \quad (11).$$

Durch Differentiation von (10) erhalten wir dann wegen (4)

$$\begin{aligned} \varrho \frac{d\varphi}{dt} = (\lambda \cos\varphi + \mu \sin\varphi)\frac{d\varphi}{dt} &= -\frac{d\lambda}{dt}\sin\varphi + \frac{d\mu}{dt}\cos\varphi \\ &= (u_x \lambda + v_x \mu)\sin\varphi - (u_y \lambda + v_y \mu)\cos\varphi \\ &= \varrho(-u_y \cos^2\varphi + (u_x - v_y)\cos\varphi \sin\varphi + v_x \sin^2\varphi) \end{aligned}$$

und damit als die bestimmende Differentialgleichung unseres Variationsproblems die „Navigationsformel“

$$\frac{d\varphi}{dt} = -u_y \cos^2\varphi + (u_x - v_y)\cos\varphi \sin\varphi + v_x \sin^2\varphi \quad \ldots \ldots \quad (12),$$

welche sich im Falle $\varphi = 0$ (d. h. wenn wir vorübergehend die Abszissenachse in die augenblickliche Steuerrichtung legen) auf $\frac{d\varphi}{dt} = -u_y$ reduziert, also: *Das Steuer muß immer nach der Seite gedreht werden, nach welcher die gegen die Steuerrichtung wirkende Windkomponente größer wird.*

Die rechte Seite der Gleichung enthält nur Glieder mit partiellen Ableitungen nach den Raumkoordinaten, verschwindet also in dem Spezialfalle eines gleichförmigen Windfeldes, wo u, v von x, y unabhängig als Funktionen der Zeit gegeben sind. In diesem Falle ist die Steuerrichtung φ auf jeder Extremalen konstant, aber Geraden werden wegen (1) alle Extremalen nur dann, wenn das gleichförmige Windfeld auch in der Zeit unverändert bleibt.

Die Differentialgleichungen (1) und (12) bestimmen zusammen eine 3-parametrige Schar von Extremalen, so daß etwa zur Zeit $t = t_0$ von einem Punkte x_0, y_0 des Feldes eine Extremale mit vorgeschriebener Steuerrichtung $\varphi = \varphi_0$, aus jedem Punkte also ein (in der Zeit veränderliches) Büschel von Extremalen ausgeht.

Für spätere Zwecke brauchen wir noch die Bestimmung der in (11) eingeführten Funktion

$$\varrho = \lambda \cos\varphi + \mu \sin\varphi$$

und wir finden mit Hilfe von (4) und (10)

$$\left.\begin{aligned} \frac{d\varrho}{dt} &= \frac{d\lambda}{dt}\cos\varphi + \frac{d\mu}{dt}\sin\varphi + (-\lambda\sin\varphi + \mu\cos\varphi)\frac{d\varphi}{dt} \\ &= -(u_x\lambda + v_x\mu)\cos\varphi - (u_y\lambda + v_y\mu)\sin\varphi \\ &= -\varrho\,[u_x\cos^2\varphi + (u_y + v_x)\cos\varphi\sin\varphi + v_y\sin^2\varphi] = -\varrho W \end{aligned}\right\} \quad . \; . \; . \quad (13).$$

Hieraus folgt weiter

$$\varrho = C\,e^{-\int W dt} \quad . \; . \quad (13')$$

und die Funktion $\varrho = \varrho(t)$ kann auf keinem Extremalenstück ihr *Vorzeichen wechseln*, auf welchem alle partiellen Ableitungen von u, v und damit auch die Funktion W endlich bleibt.

§ 2. *Die Konstruktion des Feldes und die hinreichenden Bedingungen des Extremums.*

Nach dem Vorgang von *Weierstraß* versuchen wir, ein „Feld" von Extremalen zu konstruieren, das uns auch die *hinreichenden* Bedingungen für das Bestehen eines Maximums oder Minimums der Fahrzeit zwischen zwei gegebenen Punkten 1 und 2 liefern soll. Dabei ist aber in dem Falle, wo die Windkomponenten u, v auch von der Zeit t abhängen, nicht nur auf die *Zeitdauer*, sondern auch auf die *Zeitlage* Rücksicht zu nehmen. Es ist nicht das gleiche, ob wir, von 1 ausgehend, so *früh* wie möglich in 2 *eintreffen* oder so *spät* wie möglich von 1 *abreisen* wollen. Beide Probleme müssen also etwas verschieden behandelt werden. Ihre Analogie ist aber so ersichtlich, daß es hier genügen wird, uns auf das *erste* Problem, das des frühesten Eintreffens, zu beschränken. Wir gehen also aus von einer „extremalen Fahrt" auf einer Bahnkurve $\mathfrak{A}$, welche zwischen den Zeitpunkten $t = t_1$ und $t = t_2$ überall den Differentialgleichungen (1) und (12) des Problems genügt, und vergleichen sie mit einer anderen „steuerbaren" Fahrt auf einer „Vergleichskurve" $\mathfrak{C}$, welche *gleichzeitig* mit der ersten zur Zeit $t = t_1$ in 1 startet und dann (früher oder später) das gleiche Ziel 2 erreicht.

Abb. 1.

Zu diesem Zwecke verbinden wir *jeden* Punkt 3 der Vergleichsbahn $\mathfrak{C}$ mit dem Zielpunkte 2 durch eine mit $\mathfrak{A}_3$ bezeichnete Extremale oder „Brachistochrone" 3 2, welche *gleichzeitig* zur Zeit t_3 mit dem Vergleichsfahrzeug von 3 ausgeht und dann zur Zeit τ in 2 eintrifft. Indem wir nun einem Fahrgast von 1 zur Zeit t_1 auf dem Fahrzeug $\mathfrak{C}$ bis zum Punkte 3 mitnehmen und dann auf die Extremalbahn 3 2 *umsteigen* lassen, gewinnen wir einen *kontinuierlichen Übergang* zwischen den beiden zu vergleichenden Fahrten auf $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{C}$. Sollte sich nun dabei herausstellen, daß für zwei aufeinanderfolgende Umsteigestationen 3, 3' mit $t_3 < t_3'$ die Fahrzeit über 1 3' 2 immer größer ausfällt als die über 1 3 2, so würde daraus a fortiori folgen, daß auch die Gesamtfahrzeit auf $\mathfrak{C}$ zwischen 1 und 2 größer ist als die auf der Extremalen $\mathfrak{A}$. Zunächst handelt es sich aber um die *Ausführbarkeit* der geforderten Konstruktion.

Da die Integration der Differentialgleichung (1) und (12) auf drei Integrationskonstanten a_1, a_2, a_3 führt,

$$x = f(t;\, a_1, a_2, a_3), \quad y = g(t;\, a_1, a_2, a_3), \quad \varphi = h(t;\, a_1, a_2, a_3),$$

so wird man „im allgemeinen" auch drei Bedingungen erfüllen, oder durch Einführung einer neuen Unbekannten τ die folgenden 4 Gleichungen befriedigen können

$$x_3 = f(t_3, a_i), \quad y_3 = g(t_3, a_i); \quad x_2 = f(\tau, a_i), \quad y_2 = g(\tau, a_i),$$

die für $t_3 = t_1$, $\tau = t_2$ durch die Grundextremale $\mathfrak{A}$ schon erfüllt werden. Bei der kontinuierlichen Änderung von x, y, t auf $\mathfrak{C}$ würde diese Erfüllbarkeit nach den Gesetzen der impliziten Funktionen nicht aufhören, solange die „Funktionaldeterminante" J der 4 rechten Seiten nach den Variablen τ, a_1, a_2, a_3 von Null verschieden bleibt. Ihr Verschwinden für einen Punkt 3 auf $\mathfrak{C}$ würde bedeuten, daß hier zwei Wurzelsysteme der Gleichungen und damit zwei Zwischenextremalen 3 2 „zusammenfallen". Die Frage nach der Konstruierbarkeit des „Feldes" hängt also auf das engste zusammen mit den „Doppelelementen" unseres Extremalensystems, und ihre Beantwortung liefert uns die unserem Problem angepaßte „*Jacobi*sche Bedingung"

der „konjugierten Punkte". Sie hängt immer mit der besonderen „Windverteilung" u, v zusammen und kann nur in besonderen Fällen erschöpfend beantwortet werden. Hier soll darauf nicht näher eingegangen, sondern mit der Verwertung der vorausgesetzten Konstruktion für unser Variationsproblem fortgefahren werden. Nur folgendes werde noch bemerkt. Da auch die Funktionaldeterminante J im allgemeinen eine stetige Funktion der vorkommenden Elemente sein wird, so genügt es, ihr Nichtverschwinden auf der „Grundextremalen" $\mathfrak{A}$ selbst festzustellen, um dann auch auf ihr Nichtverschwinden in einer gewissen „Umgebung" schließen zu können.

Die „Feldextremalen" $\mathfrak{A}_3$, die zu einer „steuerbaren Vergleichsbahn" $\mathfrak{C}$ gehören, bilden eine einparametrige Schar

$$x = f(t, a), \quad y = g(t, a), \quad \varphi = h(t, a),$$

als deren Parameter die Zeit t_3 gewählt werden kann, zu der unser Fahrgast auf die Extremale umsteigt. Für jede solche Extremalenschar gilt aber wegen (3), (4), (10) die Beziehung

$$\frac{d}{dt}\left(\lambda \frac{\partial x}{\partial a} + \mu \frac{\partial y}{\partial a}\right) = 0 \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots (14)$$

oder

$$\lambda \frac{\partial x}{\partial a} + \mu \frac{\partial y}{\partial a} = \varrho \left(\frac{\partial x}{\partial a} \cos\varphi + \frac{\partial y}{\partial a} \sin\varphi\right) = \text{const} \quad \ldots \ldots \ldots (14')$$

in dem Sinne, daß der Ausdruck links auf jeder einzelnen Extremalen $\mathfrak{A}_3$ in der Zeit konstant bleibt, also eine Funktion des Parameters $a = t_3$ darstellt. Da nun alle diese Bahnen vom (veränderlichen) Punkte 3 ausgehen und alle (sukzessive) zur Zeit $t = \tau$ im festen Endpunkte 2 einlaufen, so gilt für jedes $a = t_3$

$$\varrho_3 (f_a(t_3, a) \cos\overline{\varphi}_3 + g_a(t_3, a) \sin\overline{\varphi}_3) = \varrho_2 (f_a(\tau, a) \cos\overline{\varphi}_2 + g_a(\tau, a) \sin\overline{\varphi}_2) \quad \ldots (15),$$

wo $\overline{\varphi}_3$ und $\overline{\varphi}_2$ die Steuerrichtungen der Feldextremalen in den Punkten 3 und 2, sowie ϱ_3 und ϱ_2 die Werte der in (11) eingeführten und durch (13') bestimmten Funktion $\varrho(t, a)$ auf der Feldextremalen in 3 und 2 bedeuten, also

$$\varrho_3 = \varrho(t_3, a) = \varrho(a, a), \quad \varrho_2 = \varrho(\tau, a) \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (16).$$

Aus den Grenzbedingungen der Feldextremalen in 3 und 2

$$\left.\begin{aligned} x_3 &= f(t_3, a) = f(a, a), \quad y_3 = g(t_3, a) = g(a, a) \\ x_2 &= f(\tau, a), \qquad\qquad\quad y_2 = g(\tau, a) \end{aligned}\right\} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (17)$$

ergibt sich nun durch (totale) Differentiation nach a, wobei der Akzent die partielle Differentiation nach dem ersten, der Index a die nach dem zweiten Argument bezeichnet,

$$\left.\begin{aligned} \frac{dx_3}{da} &= f_a(a, a) + f'(a, a), \quad \frac{dy_3}{da} = g_a(a, a) + g'(a, a) \\ 0 &= f_a(\tau, a) + f'(\tau, a)\frac{d\tau}{da}, \quad 0 = g_a(\tau, a) + g'(\tau, a)\frac{d\tau}{da} \end{aligned}\right\} \quad \ldots \ldots \ldots (18)$$

und wir erhalten unter Hinzuziehung der „Steuergleichungen" (1)

$$\left.\begin{aligned} f_a(t_3, a) &= f_a(a, a) = \frac{dx_3}{da} - f'(a, a) = x_3' - \overline{x}_3' = \cos\varphi_3 - \cos\overline{\varphi}_3 \\ g_a(t_3, a) &= g_a(a, a) = \frac{dy_3}{da} - g'(a, a) = y_3' - \overline{y}_3' = \sin\varphi_3 - \sin\overline{\varphi}_3 \end{aligned}\right\} \quad \ldots (19),$$

wo $x_3' = \frac{dx_3}{dt_3}$, $y_3' = \frac{dy_3}{dt_3}$ die Geschwindigkeitskomponenten der Vergleichsbahn im (bewegten) Punkte 3 zur Zeit $t = t_3 = a$, sowie $\overline{x}_3' = f'(t_3, a)$, $\overline{y}_3' = g'(t_3, a)$ die entsprechenden der Feldextremalen im nämlichen Raumzeitpunkte (x_3, y_3, a) bezeichnen. Ebenso erhalten wir im (festen) Endpunkte 2 aus (18)

$$\left.\begin{aligned} -\frac{da}{d\tau} f_a(\tau, a) &= f'(\tau, a) = \overline{x}_2' = u(x_2, y_2, \tau) + \cos\overline{\varphi}_2 = u_2(\tau) + \cos\overline{\varphi}_2 \\ -\frac{da}{d\tau} g_a(\tau, a) &= g'(\tau, a) = \overline{y}_2' = v(x_2, y_2, \tau) + \sin\overline{\varphi}_2 = v_2(\tau) + \sin\overline{\varphi}_2 \end{aligned}\right\} \quad \ldots \ldots (20)$$

in der entsprechenden Bezeichnungsweise. So ergibt sich durch Einsetzung in (15)

$$\frac{d\tau}{da} = \frac{\varrho_3}{\varrho_2} \cdot \frac{(\bar{x}_3' - x_3')\cos\bar{\varphi}_3 + (\bar{y}_3' - \bar{y}_3')\sin\bar{\varphi}_3}{\bar{x}_2'\cos\bar{\varphi}_2 + \bar{y}_2'\sin\bar{\varphi}_2} = \frac{\varrho_3}{\varrho_2} \cdot \frac{1 - \cos(\bar{\varphi}_3 - \varphi_3)}{1 + u_2\cos\bar{\varphi}_2 + v_2\sin\bar{\varphi}_2} \quad . \quad . \quad (21).$$

Hier ist der Quotient

$$\frac{\varrho_3}{\varrho_2} = \frac{\varrho(t_3, a)}{\varrho(\tau, a)} = \frac{\varrho(a, a)}{\varrho(\tau, a)}$$

wegen (13') wesentlich positiv, ebenso auch der Zähler, der höchstens für $\varphi_3 = \bar{\varphi}_3$ verschwindet, wo $x_3' = \bar{x}_3'$, $y_3' = \bar{y}_3'$ wird und Feldextremale und Vergleichsbahn sich berühren. Das Vorzeichen von $\frac{d\tau}{da}$ wird also nur noch durch das des Nenners bestimmt und ist positiv jedenfalls in jedem „unbeschränkt manövrierbaren Felde", in welchem überall die Windstärke $\sqrt{u^2+v^2} < 1$ kleiner ist als die Eigengeschwindigkeit des Fahrzeugs. Im anderen Falle $u^2+v^2 > 1$ gehören entsprechend den Gl. (1) zu jeder Bahnrichtung $x' : y'$ im allgemeinen zwei Steuerrichtungen φ_{I}, φ_{II}, von denen die eine einen spitzen, die andere einen stumpfen Winkel mit der Bahnrichtung einschließt, so daß der Ausdruck

$$x'\cos\varphi + y'\sin\varphi = 1 + u\cos\varphi + v\sin\varphi \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (22)$$

im ersten Falle positiv, im zweiten negativ ausfällt. Nur im Grenzfalle, wo beide zusammenfallen, verschwindet der Ausdruck. Dieses Verhalten erhellt unmittelbar aus der nebenstehenden Abb. 2, wie sie für das im einfachsten Spezialfalle des ruhenden, homogenen Windfeldes durch R. v. Mises („Ztschr. f. Flugt. u. Motorluftschiffahrt, 1917, S. 145) zur Illustration der „Steuergleichungen" angegeben wurde. Hier bezeichnen $\mathfrak{w}$, $\mathfrak{q}_{\mathrm{I}}$, $\mathfrak{q}_{\mathrm{II}}$ die Endpunkte der von 0 ausgehenden Vektoren, die der Windstärke u, v und den beiden in gleicher Richtung möglichen Bahngeschwindigkeiten q_1, q_2 zugehören, während die Vektoren $\mathfrak{w}\,\mathfrak{q}_1$, $\mathfrak{w}\,\mathfrak{q}_2$ den beiden Steuerrichtungen φ_{I}, φ_{II} entsprechen. Im Grenzfalle, wo der Bahnvektor $\mathfrak{q}$ den Einheitskreis berührt, verschwindet das innere Produkt $x'\cos\varphi + y'\sin\varphi$ aus Bahn- und Steuervektor, und solche Bahnelemente (x, y, y', y') wollen wir als „singulär" bezeichnen, während die übrigen „regulär" heißen sollen. Dann sind also die „singulären" Bahnelemente die einzigen, in denen der oben (21) gegebene Ausdruck für $\frac{d\tau}{da}$ sein Vorzeichen wechseln kann, und in einem (räumlich und zeitlich begrenzten oder unbegrenzten) „regulären" Felde von Extremalen hat der Ausdruck ein definites Vorzeichen und ist überall positiv oder negativ, je nachdem die erzeugenden Extremalen dem „spitzwinkligen" oder dem „stumpfwinkligen" Typus zugehören, d. h. je nach dem im Sinne oder entgegen der Bahnrichtung gesteuert wird. Nun ergibt aber bei unserer Konstruktion des Extremalenfeldes für jede innerhalb desselben verlaufende „Vergleichsbahn" $\mathfrak{C}$ die Integration über die Variable t_3, die wir jetzt einfach durch t ersetzen, zwischen den Grenzen t_1 und t_2 die Beziehung

Abb. 2.

$$\tau_2 - t_2 = \tau(t_2) - \tau(t_1) = \int_{t_1}^{t_2} \frac{d\tau(t)}{dt}\,dt = \int_{t_1}^{t_2} \frac{\varrho(t,t)}{\varrho(\tau,t)} \, \frac{1 - \cos(\bar{\varphi} - \varphi)}{1 + u_2\cos\bar{\varphi}_2 + v_2\sin\bar{\varphi}_2}\,dt \quad . \quad . \quad . \quad (23)$$

und diese Differenz der beiden zwischen den Endpunkten 1 und 2 auf $\mathfrak{C}$ und $\mathfrak{A}$ gesteuerten Fahrtzeiten ist im „spitzwinkligen" Falle immer positiv, im „stumpfwinkligen" immer negativ. Im ersteren haben wir also ein Minimum, im letzteren ein Maximum der Fahrtdauer der extremalen Bahn gegenüber jeder ganz im Felde verlaufenden Vergleichsbahn. Der Fall des Maximums, also der Fall der „Megistochrone", kann freilich nur eintreten innerhalb eines nur „beschränkt manövrierbaren" Windfeldes, in dem die Windstärke überall größer ist als die Eigenbewegung. Innerhalb eines „unbeschränkt manövrierbaren" Windfeldes dagegen liefert jede „extremale Bahn" zwischen den durch „konjugierte Elemente" gegebenen Grenzen ein Minimum der Fahrtdauer gegenüber allen im Felde verlaufenden Vergleichsbahnen.

§ 3. Das Problem im dreidimensionalen Raume.

Unsere bisherigen Betrachtungen waren auf die Ebene beschränkt, also bei der Luftfahrt auf eine Navigation in gleichbleibender Höhe. Nun variiert aber bekanntlich die Windverteilung außerordentlich stark mit der Höhenlage, ja noch stärker als mit den Ortskoordinaten, und dieser Tatsache pflegt auch die praktische Navigation durch geeignete Verwendung des „Höhensteuers" Rechnung zu tragen. Es dürfte daher auch eine theoretische Behandlung des dreidimensionalen Problems nicht als überflüssig erscheinen, wenn auch bei der praktischen Aufwärts- und Abwärtsbewegung des Fahrzeuges, sofern sie schnell erfolgt,

die vertikale Relativgeschwindigkeit nicht ohne weiteres der horizontalen gleichgesetzt werden kann. Jedenfalls soll im folgenden das mathematisch genau entsprechende Problem für den Raum, wie im vorausgehenden für die Ebene, behandelt werden. Dabei sind natürlich rein theoretisch alle Koordinaten gleichberechtigt; bei allen Hinweisen auf die Praxis soll aber immer die z-Richtung als die der „Vertikalen" bevorzugt und dementsprechend jede Änderung des Winkels ϑ der „Steuerrichtung" gegen die Vertikale als „Höhensteuerung" bezeichnet werden im Gegensatze zu der durch φ bestimmten „Seitensteuerung". Die Methode der mathematischen Behandlung wird im wesentlichen die gleiche sein wie im zweidimensionalen Falle. Doch werden wir bei der Herleitung der Differentialgleichungen ein wenig anders verfahren, um hier, wo die Formeln natürlich etwas länger werden, die ganze Entwicklung durchsichtiger zu machen. Es handelt sich dabei um die Einführung einer Funktionaldeterminante und einer „definiten" oder „semi-definiten" quadratischen Form, die sich hier als notwendig herausstellt, aber auch schon im ebenen Falle möglich und vielleicht auch zweckmäßig ist.

Durch Einführung der Windkomponenten u, v, w längs der Koordinatenachsen und der die „Steuerrichtung" (oder die Relativbewegung) charakterisierenden Richtungswinkel φ, ϑ erhalten wir zunächst für jede „steuerbare" Bewegung des Fahrzeuges die „Steuergleichungen"

$$\left.\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= u + \cos\vartheta\cos\varphi \\ \frac{dy}{dt} &= v + \cos\vartheta\sin\varphi \\ \frac{dz}{dt} &= w + \sin\vartheta\end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (24),$$

wo u, v, w gegebene differentiierbare Funktionen von x, y, z, t sein sollen.

Hieraus gewinnen wir durch „Variation", d. h. durch partielle Differentiation δ (bei konstanter Zeit) nach einem beliebigen Parameter a einer Schar „steuerbarer Bahnen" die „Variationsgleichungen"

$$\left.\begin{aligned}\frac{d\,\delta x}{dt} &= u_x\,\delta x + u_y\,\delta y + u_z\,\delta z - \cos\vartheta\sin\varphi\,\delta\varphi - \sin\vartheta\cos\varphi\,\delta\vartheta \\ \frac{d\,\delta y}{dt} &= v_x\,\delta x + v_y\,\delta y + v_z\,\delta z + \cos\vartheta\cos\varphi\,\delta\varphi - \sin\vartheta\sin\varphi\,\delta\vartheta \\ \frac{d\,\delta z}{dt} &= w_x\,\delta x + w_y\,\delta y + w_z\,\delta z + \cos\vartheta\,\delta\vartheta\end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (25).$$

Diese Differentialgleichungen bestimmen, wenn eine „steuerbare Grundbahn" durch $x, y, z, \varphi, \vartheta$ als Funktionen von t gegeben ist, die Variationen δx, δy, δz eindeutig durch die willkürlich vorgeschriebenen Variationen $\delta\varphi$, $\delta\vartheta$ und durch ihre „Anfangswerte" bei $t = t_0$, die wir in den nächstfolgenden Betrachtungen als verschwindend ansehen wollen: $\delta x_0 = \delta y_0 = \delta z_0 = 0$. Diese Bestimmung erfolgt nach der Theorie der linearen Differentialgleichungen durch Ausdrücke der Form

$$\left.\begin{aligned}\delta x &= \int_{t_0}^{t} (X_1(t)\,\delta\varphi + X_2(t)\,\delta\vartheta)\,dt \\ \delta y &= \int_{t_0}^{t} (Y_1(t)\,\delta\varphi + Y_2(t)\,\delta\vartheta)\,dt \\ \delta z &= \int_{t_0}^{t} (Z_1(t)\,\delta\varphi + Z_2(t)\,\delta\vartheta)\,dt\end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (26),$$

wobei die „unabhängigen Variationen" $\delta\varphi$, $\delta\vartheta$ als Faktoren gegebener Zeitfunktionen unter den Integralzeichen erscheinen. Wie im ebenen Falle führen wir auch hier „Multiplikatoren" λ, μ, ν ein, die den entsprechenden (linearen und homogenen) Differentialgleichungen genügen sollen

$$\left.\begin{aligned}\frac{d\lambda}{dt} + u_x\lambda + v_x\mu + w_x\nu &= 0 \\ \frac{d\mu}{dt} + u_y\lambda + v_y\mu + w_y\nu &= 0 \\ \frac{d\nu}{dt} + u_z\lambda + v_z\mu + w_z\nu &= 0\end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (27),$$

durch die sie als Funktionen der Zeit bestimmt werden in der Form

$$\lambda = c_1 \lambda_1 + c_2 \lambda_2 + c_3 \lambda_3, \quad \mu = c_1 \mu_1 + c_2 \mu_2 + c_3 \mu_3, \quad \nu = c_1 \nu_1 + c_2 \nu_2 + c_3 \nu_3 \quad . \quad . \quad (28)$$

mit den „willkürlichen Konstanten“ c_1, c_2, c_3. Für jedes solches Lösungssystem λ, μ, ν ergibt sich dann aus (25) und (27)

$$\left.\begin{aligned} \frac{d}{dt}(\lambda\,\delta x + \mu\,\delta y + \nu\,\delta z) &= (-\lambda \cos\vartheta \sin\varphi + \mu \cos\vartheta \cos\varphi)\,\delta\varphi \\ &+ (-\lambda \sin\vartheta \cos\varphi - \mu \sin\vartheta \sin\varphi + \nu \cos\vartheta)\,\delta\vartheta \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad (29),$$

und es soll nun gezeigt werden, daß auf den gesuchten „Brachistochronen“ die beiden mit $\delta\varphi$ bzw. $\delta\vartheta$ multiplizierten Ausdrücke (bei geeigneter Wahl der Konstanten c_1, c_2, c_3) für variable $t > t_0$ einzeln verschwinden müssen. Zu diesem Zwecke wählen wir die „willkürlichen Variationen“ $\delta\varphi$, $\delta\vartheta$, die auch keiner „Grenzbedingung“ zu genügen brauchen, so, daß sie den mit ihnen multiplizierten Faktoren gleich werden:

$$\left.\begin{aligned} \delta\varphi &= \Phi = (-\lambda \sin\varphi + \mu \cos\varphi) \cos\vartheta \\ \delta\vartheta &= \Theta = -\lambda \cos\varphi \sin\vartheta - \mu \sin\varphi \sin\vartheta + \nu \cos\vartheta \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (30),$$

und erhalten dabei durch Benutzung von (28) Ausdrücke der Form

$$\left.\begin{aligned} \delta\varphi &= c_1 \Phi_1 + c_2 \Phi_2 + c_3 \Phi_3 \\ \delta\vartheta &= c_1 \Theta_1 + c_2 \Theta_2 + c_3 \Theta_3 \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (31),$$

wo sich die Paare Φ_i, Θ_i immer auf die entsprechenden Tripel λ_i, μ_i, ν_i in (28) beziehen. Ihnen entsprechen auf der linken Seite von (29) wegen (26) wieder Ausdrücke der Form

$$\delta x = \xi = c_1 \xi_1 + c_2 \xi_2 + c_3 \xi_3, \quad \delta y = \eta = c_1 \eta_1 + c_2 \eta_2 + c_3 \eta_3, \quad \delta z = \zeta = c_1 \zeta_1 + c_2 \zeta_2 + c_3 \zeta_3 \quad (32),$$

wo die Tripel ξ_i, η_i, ζ_i als durch (26) gegebene Funktionen von t anzusehen sind. Durch Integration nach der Zeit erhalten wir dann aus (29) unter Verwendung von (28) und (32)

$$\lambda \xi + \mu \eta + \nu \zeta = \int_{t_0}^{t} dt\,[(c_1 \Phi_1 + c_2 \Phi_2 + c_3 \Phi_3)^2 + (c_1 \Theta_1 + c_2 \Theta_2 + c_3 \Theta_3)^2] = Q(c_1, c_2, c_3; t) \quad . \quad . \quad (33),$$

als eine homogene quadratische Form der c_1, c_2, c_3, deren Koeffizienten gegebene Funktionen von t sind. Diese Form Q ist, wie aus der rechten Seite ersichtlich, wesentlich positiv, und zwar „semidefinit“ oder „definit“, je nachdem sie durch Wahl der Konstanten auf Null reduziert werden kann oder nicht.

Jetzt aber sei

$$x = \bar{x}(t), \quad y = \bar{y}(t), \quad z = \bar{z}(t) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (34)$$

eine Brachistochrone in dem hier gemeinten Sinne und

$$x = f(t; \alpha, \beta, \gamma), \quad y = g(t; \alpha, \beta, \gamma), \quad z = h(t; \alpha, \beta, \gamma) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (35)$$

eine dreiparametrige Schar benachbarter „steuerfähiger“ Bahnen, welche alle für $t = t_0$ von demselben Punkte x_0, y_0, z_0 ausgehen sollen und sich für $\alpha = \bar{\alpha}$, $\beta = \bar{\beta}$, $\gamma = \bar{\gamma}$ auf die „Grundbahn“ (34) reduzieren. Dann muß die aus den partiellen Ableitungen der Funktionen (35) nach den Parametern α, β, γ gebildete „Funktionaldeterminante“

$$D(t; \alpha, \beta, \gamma) = \begin{vmatrix} f_\alpha & f_\beta & f_\gamma \\ g_\alpha & g_\beta & g_\gamma \\ h_\alpha & h_\beta & h_\gamma \end{vmatrix} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (36)$$

auf der Brachistochrone $\alpha = \bar{\alpha}$, $\beta = \bar{\beta}$, $\gamma = \bar{\gamma}$ selbst überall, d. h. für variable t im ganzen betrachteten Intervall verschwinden:

$$\bar{D}(t) = D(t; \bar{\alpha}, \bar{\beta}, \bar{\gamma}) = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (37).$$

Denn wäre etwa $\bar{D}(t^*) \neq 0$ für $t^* > t_0$, so könnte man nach dem Satze der „impliziten Funktionen“ in der Umgebung der Stelle $t^*, \bar{x}(t^*), \bar{y}(t^*), \bar{z}(t^*)$ die Gl. (35) nach α, β, γ auflösen, wobei auch Wertsysteme $x = \bar{x}(t^*)$, $y = \bar{y}(t^*)$, $z = \bar{z}(t^*)$, $t \gtreqless t^*$ in hinreichender Nähe beliebig vorgeschrieben werden könnten — und unsere „Grundbahn“ wäre keine Extremale oder Brachistochrone.

Diese Eigenschaft (37) gilt insbesondere auch für die dreiparametrige Bahnenschar (35), die sich an unsere Brachistochrone (34) anschließt und den Bedingungen genügt

$$\bar{f}_\alpha = \xi_1(t), \; \bar{g}_\alpha = \eta_1(t), \; \bar{h}_\alpha = \zeta_1(t), \; \bar{f}_\beta = \xi_2(t), \; \bar{g}_\beta = \eta_2(t) \text{ usw.} \quad \ldots \ldots \quad (38),$$

deren Existenz in der Theorie der partiellen Differentialgleichungen bewiesen werden kann. Dann folgt aber aus (37) für eine willkürliche Stelle $t = t^* > t_0$ auch die Existenz eines nicht verschwindenden Wertesystems c_1^*, c_2^*, c_3^* von der Eigenschaft

$$\left.\begin{aligned} c_1^* \xi_1(t^*) + c_2^* \xi_2(t^*) + c_3^* \xi_3(t^*) &= 0 \\ c_1^* \eta_1(t^*) + c_2^* \eta_2(t^*) + c_3^* \eta_3(t^*) &= 0 \\ c_1^* \zeta_1(t^*) + c_2^* \zeta_2(t^*) + c_3^* \zeta_3(t^*) &= 0 \end{aligned}\right\} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (39),$$

d. h. für diese Werte $c_1 = c_1^*$, $c_2 = c_2^*$, $c_3 = c_3^*$ verschwinden die „erlaubten Variationen“ ξ, η, ζ gleichzeitig an der Stelle $t = t^*$, und es ist daher hier wegen (33) weiter

$$\lambda^* \xi(t^*) + \mu^* \eta(t^*) + \nu^* \zeta(t^*) = Q(c_1^*, c_2^*, c_3^*; t^*) = 0 \quad \ldots \ldots \ldots \quad (40),$$

d. h. unsere (positive) quadratische Form Q ist im ganzen Intervall der Brachistochrone semi-definit. Dann müssen aber auch in (33) für diese Werte c_1^*, c_2^*, c_3^* die beiden Quadrate unter dem Integralzeichen einzeln verschwinden, und wir erhalten für die entsprechenden Multiplikatoren $\lambda = \lambda^*$, $\mu = \mu^*$, $\nu = \nu^*$ gemäß (30) die Gleichungen

$$\left.\begin{aligned} \Phi &\equiv (-\lambda \sin\varphi + \mu \cos\varphi)\cos\vartheta = 0 \\ \Theta &\equiv -\lambda \sin\vartheta \cos\varphi - \mu \sin\vartheta \sin\varphi + \nu \cos\vartheta = 0 \end{aligned}\right\} \quad \ldots \ldots \quad (41)$$

zusammen mit (24) als Bedingungsgleichungen der Brachistochrone zur Bestimmung von x, y, z, φ, ϑ, λ, μ, ν als Funktionen von t. Hier können wir aber die Multiplikatoren λ, μ, ν wieder eliminieren durch den Ansatz

$$\lambda = \varrho \cos\vartheta \cos\varphi, \quad \mu = \varrho \cos\vartheta \sin\varphi, \quad \nu = \varrho \sin\vartheta, \quad \varrho = \sqrt{\lambda^2 + \mu^2 + \nu^2} \quad \ldots \ldots \quad (42),$$

der augenscheinlich die Gleichungen (41) identisch erfüllt. Es ergibt sich nämlich

$$\begin{aligned} -\varrho \frac{d\varrho}{dt} = -\lambda \frac{d\lambda}{dt} - \mu \frac{d\mu}{dt} - \nu \frac{d\nu}{dt} &= u_x \lambda^2 + (v_x + u_y)\lambda\mu + v_y \mu^2 \\ &\quad + (u_z + w_x)\lambda\nu + (v_z + w_y)\mu\nu + w_z \nu^2 \end{aligned}$$

oder wegen (42)

$$\left.\begin{aligned} -\frac{1}{\varrho}\frac{d\varrho}{dt} &= (u_z \cos^2\varphi + (u_y + v_x)\cos\varphi \sin\varphi + v_y \sin^2\varphi)\cos^2\vartheta \\ &\quad + [(u_z + w_x)\cos\varphi + (v_z + w_y)\sin\varphi]\cos\vartheta \sin\vartheta + w_z \sin^2\vartheta \equiv R(t) \end{aligned}\right\} \quad \ldots \ldots \quad (43)$$

und hieraus weiter

$$\varrho = C e^{-\int_{t_0}^{t} R(t)\,dt} = \sqrt{\lambda^2 + \mu^2 + \nu^2} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (43')$$

als eine Funktion, die in einem regulären Intervall (wo alle Ableitungen u_x, $u_y \ldots$ endlich bleiben) weder verschwinden noch ihr Zeichen wechseln kann.

Die Einsetzung der Werte (42) in die Differentialgleichungen (27) ergibt dann vermöge einer einfachen Rechnung die beiden „Navigationsgleichungen“

$$\left.\begin{aligned} \frac{d\varphi}{d\vartheta} &= -u_y \cos^2\varphi + (u_x - v_y)\cos\varphi \sin\varphi + v_x \sin^2\varphi + (w_x \sin\varphi - w_y \cos\varphi)\,tg\,\vartheta \\ \frac{d\tau}{dt} &= -(u_z \cos\varphi + v_z \sin\varphi)\cos^2\vartheta + [u_x \cos^2\varphi + (v_x + u_y)\cos\varphi \sin\varphi + v_y \sin^2\varphi - w_z]\cos\vartheta \sin\vartheta \\ &\quad + (w_x \cos\varphi + w_y \sin\varphi)\sin^2\vartheta, \end{aligned}\right\} \quad (44),$$

welche zusammen mit den „Steuergleichungen“ (24) die 5 Variablen x, y, z, φ, ϑ bestimmen als Funktionen der Zeit und der 5 „Anfangswerte“ x_0, y_0, z_0, φ_0. ϑ_0 zur Zeit $t = t_0$.

In dem praktisch vielleicht wichtigen Sonderfalle, wo die Windkomponenten ausschließlich mit der Höhe z und mit der Zeit variieren, während die Vertikalkomponente verschwindet, ergibt sich

$$\frac{d\varphi}{dt} = 0, \quad \frac{d\vartheta}{dt} = -(u_z \cos\varphi + v_z \sin\varphi)\cos^2\vartheta$$

oder

$$\varphi = \text{const}, \; tg\,\vartheta_0 - tg\,\vartheta = \cos\varphi \int_{t_0}^{t} u_z\,dt + \sin\varphi \int_{t_0}^{t} v_z\,dt = F(z, t) \quad \ldots \ldots \quad (45),$$

d. h. die Horizontalkomponente der Steuerrichtung bleibt sich selbst parallel, während ihre Vertikalkomponente durch die jeweilige Höhenlage bestimmt wird.

Um nun auch hier hinreichende Bedingungen des Extremums zu finden, machen wir die Weierstraßsche Feldkonstruktion ganz analog wie im Falle des ebenen Problems, nur daß wir jetzt zur Abwechslung das Terminproblem der spätesten Abreise unserer Betrachtung zugrunde legen. Dann legen wir durch den Ausgangspunkt 1 ein dreiparametriges Bündel von Extremalbahnen, die alle zu verschiedenen Zeiten $t=\tau$ von 1 ausgehen, so daß jeder „Vergleichsbahn“ $\mathfrak{C}$ ein einparametrisches Büschel von Extremalen $\mathfrak{A}_a$ entspricht, die von 1 nach dem variablen Punkte 3 auf $\mathfrak{C}$ laufen und gleichzeitig mit ihm zur Zeit $t_3=a$ dort eintreffen. Auch hier benutzen wir auf Grund von (29) und (41) die Haupteigenschaft der Extremalen

$$\lambda\frac{\partial x}{\partial a}+\mu\frac{\partial y}{\partial a}+\nu\frac{\partial z}{\partial a}=\text{const} \quad \ldots \quad (46)$$

und wenn wir für die Feldextremalen setzen

und entsprechend
$$\left.\begin{aligned} x&=f(t,a), & y&=g(t,a), & z&=h(t,a)\\ \lambda&=\lambda(t,a), & \mu&=\mu(t,a), & \nu&=\nu(t,a)\end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (47),$$

so erhalten wir für den Start in 1

$$x_1=f(\tau,a),\quad y_1=g(\tau,a),\quad z_1=h(\tau,a) \quad \ldots \quad (48),$$

also

$$0=f_a(\tau,a)+f'(\tau,a)\frac{d\tau}{da}=g_a(\tau,a)+g'(\tau,a)\frac{d\tau}{da}=h_a(\tau,a)+h'(\tau,a)\frac{d\tau}{da} \quad . \quad (49);$$

und entsprechend für die Umsteigestation 3

$$x_3=f(t_3,a)=f(a,a),\quad y_3=g(a,a)\quad z_3=h(a,a) \quad \ldots \quad (50),$$

also

$$\frac{dx_3}{da}=f_a(a,a)+f'(a,a),\quad \frac{dy_3}{da}=g_a(a,a)+g'(a,a),\quad \frac{dz_3}{da}=h_a(a,a)+h'(a,a) \quad . \quad (51)$$

oder, wenn wir wieder für die Geschwindigkeitskomponenten auf der Extremalen $\bar{x}'$, $\bar{y}'$, $\bar{z}'$ und für die auf der Vergleichsbahn $\mathfrak{C}$ einfach x', y', z' einführen, so haben wir

$$f_a(\tau,a)=-\bar{x}_1'\frac{d\tau}{da},\quad g_a(\tau,a)=-\bar{y}_1'\frac{d\tau}{da},\quad h_a(\tau,a)=-\bar{z}_1'\frac{d\tau}{da} \quad \ldots \quad (52),$$

sowie

$$f_a(a,a)=x_3'-\bar{x}_3',\quad g_a(a,a)=y_3'-\bar{y}_3',\quad h_a(a,a)=z_3'-\bar{z}_3' \quad \ldots \quad (53).$$

Dann ergibt sich aus (46):

$$\left.\begin{aligned} &\lambda(\tau,a)f_a(\tau,a)+\mu(\tau,a)g_a(\tau,a)+\nu(\tau,a)h_a(\tau,a)\\ &=\lambda(a,a)f_a(a,a)+\mu(a,a)g_a(a,a)+\nu(a,a)h_a(a,a)\end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (54)$$

und durch Einsetzung der f_a, g_a, h_a aus (52) und (53):

$$[-\lambda(\tau,a)\bar{x}_1'-\mu(\tau,a)\bar{y}_1'-\nu(\tau,a)\bar{z}_1']\frac{d\tau}{da}=\lambda(a,a)(x_3'-\bar{x}_3')+\mu(a,a)y_3'(y_3'-\bar{y}_3')+\nu(a,a)(z_3'-\bar{z}_3') \quad (55),$$

oder, wenn man gemäß (42) die λ, μ, ν durch ϱ, φ, ϑ ersetzt,

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\varrho(\tau,a)}{\varrho(a,a)}(\bar{x}_1'\cos\bar{\vartheta}_1\cos\bar{\varphi}_1+\bar{y}_1'\cos\bar{\vartheta}_1\sin\bar{\varphi}_1+\bar{z}_1'\sin\bar{\vartheta}_1)\frac{d\tau}{da}\\ &\qquad=(\bar{x}_3'-x_3')\cos\bar{\vartheta}_3\cos\bar{\varphi}_3+(\bar{y}_3'-y_3')\cos\bar{\vartheta}_3\sin\bar{\varphi}_3+(\bar{z}_3'-z_3')\sin\bar{\vartheta}_3\end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad (56).$$

Durch Anwendung der „Steuergleichungen“ (24) auf die Extremalen in 1 und auf Extremale und Vergleichsbahn in 3 ergibt sich dann weiter $\bar{x}_3'-x_3'=\cos\bar{\vartheta}_3\cos\bar{\varphi}_3-\cos\vartheta_3\cos\varphi_3$ usw., also

$$\left.\begin{aligned} \frac{d\tau}{da}&=\frac{\varrho(a,a)}{\varrho(\tau,a)}\cdot\frac{1-\cos\vartheta_3\cos\varphi_3\cos\bar{\vartheta}_3\cos\bar{\varphi}_3-\cos\vartheta_3\sin\varphi_3\cos\bar{\vartheta}_3\sin\bar{\varphi}_3-\sin\vartheta_3\sin\bar{\vartheta}_3}{1+u_1(\tau)\cos\bar{\vartheta}_1\cos\bar{\varphi}_1+v_1(\tau)\cos\bar{\vartheta}_1\sin\bar{\varphi}_1+w_1(\tau)\sin\bar{\vartheta}_1}\\ &=\frac{\bar{\varrho}_3}{\bar{\varrho}_1}\cdot\frac{1-\cos\psi}{1+w_1^*}\end{aligned}\right\} \quad (57),$$

wo ψ den Winkel zwischen den beiden „Steuerrichtungen" in 3 (nicht den zwischen den Bahnrichtungen!) und w_1^* die Windkomponente in der Steuerrichtung der Feldextremalen in 1 zur Zeit τ bedeutet. Hier ist wieder wegen (43') der Faktor $\frac{\bar{\varrho}_3}{\bar{\varrho}_1}$ wesentlich positiv, ebenso der Zähler, der nur verschwindet, wenn in 3 beide Steuerrichtungen und damit auch beide Bahnrichtungen zusammenfallen. Das Vorzeichen des Nenners aber ist gleichfalls positiv, solange die Windstärke in 1 kleiner ist als die Eigengeschwindigkeit, und hängt sonst nur von der Auswahl unter den beiden einer Bahnrichtung zugehörigen Steuerrichtungen und entsprechenden Feldextremalen ab, genau wie im ebenen Falle am Schlusse von § 2. Es ist immer positiv im „spitzwinkligen", negativ im „stumpfwinkligen" Falle, und durch Integration der Gl. (57) über die ganze Vergleichsbahn $\mathfrak{C}$ zwischen 1 und 2 erhält man, wenn man $\alpha = t_3$ durch t ersetzt,

$$\tau_2 - t_1 = \int_{t_1}^{t_2} \frac{\bar{\varrho}_3}{\bar{\varrho}_1} \frac{1-\cos\psi}{1+w_1^*}\, dt \gtrless 0 \quad \text{(im spitzwinkligen bzw. stumpfwinkligen Falle)} \quad . \; . \; . \quad (58)$$

für die ersparte Zeit, wenn man, anstatt auf der Vergleichsbahn $\mathfrak{C}$ vielmehr auf der letzten zum Endpunkt 2 gehörenden Feldextremalen fährt, um pünktlich zur Zeit t_2 in 2 einzutreffen. Auch hier ergibt sich also wie im zweidimensionalen Falle je nach der Wahl der „spitzwinkligen" oder „stumpfwinkligen" Extremalen ein Minimum oder ein Maximum der Fahrzeit innerhalb des ganzen durch diese Extremalen einfach überdeckten Feldes. 113

Einfluß von Rohrbrunnen auf die Bewegung des Grundwassers.

Von *A. Frey Samsioe*, Stockholm.

In diesem Aufsatze ist es beabsichtigt, die räumliche Bewegung des Grundwassers in einem homogenen Medium näher zu studieren, und zwar mit dem Zweck, die durch Rohrbrunnen hervorgerufenen Veränderungen der Steighöhe des Grundwassers näher kennen zu lernen.

Wir stellen uns zuerst vor, daß der grundwassertragende Boden in allen Richtungen eine unendliche Ausdehnung hat und ganz homogen ist. Wir setzen ferner voraus, daß in diesem Boden eine Grundwasserbewegung besteht, die sich im Beharrungszustande befindet. Die Steighöhe des Grundwassers, von einer bestimmten Nullebene aus gemessen, sei in jedem Punkte mit P bezeichnet. Falls in einem gewissen Bereich des Bodens keine Wasserzufuhr und keine Wasserentnahme stattfindet, gilt für P bekanntlich die Laplacesche Differentialgleichung

$$\Delta P = 0 .$$

Nehmen wir nun an, daß wir in einem Punkte eine Senke anbringen, wo wir dem Boden eine gewisse Wassermenge entziehen, geht die frühere Steighöhe P des Grundwassers in $P + p$ über. Da die neue Steighöhe $P + p$ im ganzen Bereich des Bodens, mit Ausnahme des Senkenpunktes, auch der Laplaceschen Differentialgleichung genügen muß, ergibt sich bekanntlich

$$p = -\frac{Q}{4\pi k \varrho},$$

wo

k den Darcyschen Durchlässigkeitsbeiwert des Bodens,
ϱ die Entfernung des Aufpunktes vom Senkenpunkt, und
Q die Ergiebigkeit der Senke, d. h. diejenige Wassermenge je Zeiteinheit, welche jede Kugeloberfläche, deren Mittelpunkt mit der Senke zusammenfällt, von außen nach innen durchfließt und im Punkte $\varrho = 0$ verschwindet,

bezeichnet.

Abb. 1.

Nehmen wir ferner an, daß wir anstatt einer einzigen Senke eine geradlinige Reihe von dicht aneinander in gleicher gegenseitigen Entfernung gelegenen Senken von gleicher Ergiebigkeit haben, nachstehend eine „homogene Senkenreihe" genannt, können wir die von dieser Senkenreihe hervorgerufene zusätzliche Steighöhe p wie folgt berechnen.

Es bezeichne auf Abb. 1 die Linie AB mit der Länge $2a$ die Senkenreihe mit der Ergiebigkeit q je Zeit- und Längeneinheit. Der Punkt C ist der Aufpunkt, in dem die zusätz-

liche Steighöhe berechnet werden soll. Die senkrechte Entfernung des Punktes C von der Linie AB wird mit r, die senkrechte Entfernung dieses Punktes von einer durch die Mitte von AB und senkrecht gegen AB gelegenen Ebene mit x bezeichnet. Der Beitrag zur zusätzlichen Steighöhe im Punkte C, welche von den Senken auf der Strecke $d\xi$ der Senkenreihe AB in der Entfernung ξ von deren Mitte erzeugt wird, beträgt

$$-\frac{q\,d\xi}{4\pi k\sqrt{r^2+(\xi-x)^2}},$$

und demnach wird die gesamte zusätzliche Steighöhe im Punkte C

$$p=\frac{-q}{4\pi k}\int\limits_{-a}^{+a}\frac{d\xi}{\sqrt{r^2+(\xi-x)^2}}.$$

Durch die Substitution $z=(\xi-x)$ und Ausführung der Integration ergibt sich

$$p=\frac{q}{4\pi k}\ln\frac{-a-x+\sqrt{r^2+(a+x)^2}}{a-x+\sqrt{r^2+(a-x)^2}} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (1).$$

Nehmen wir nun an, daß anstatt einer einzigen homogenen Senkenreihe, N solche Senkenreihen vorhanden seien, ergibt sich die dadurch erzeugte zusätzliche Steighöhe im Aufpunkte zu

$$p=\sum_{n=1}^{n=N}\frac{q_n}{4\pi k}\ln\frac{-a_n-x_n+\sqrt{r_n^2+(a_n+x_n)^2}}{a_n-x_n+\sqrt{r_n^2+(a_n-x_n)^2}} \quad \ldots \ldots (2),$$

wo

q_n die aus der n-ten Senkenreihe geförderte Wassermenge je Zeit- und Längeneinheit,

$2a_n$ die Länge der n-ten Senkenreihe,

x_n die senkrechte Entfernung des Aufpunktes von einer durch die Mitte der n-ten Senkenreihe und senkrecht zu dieser gelegenen Ebene, und

r_n die senkrechte Entfernung des Aufpunktes von der n-ten Senkenreihe

bezeichnet.

Wir wollen nun untersuchen, inwiefern die oben betrachtete homogene Senkenreihe einen Filterbrunnen darstellen kann, vorausgesetzt, daß vor der Ausführung des Brunnens die Steighöhe im Bereiche des Brunnens eine gleichgroße war und der Brunnen auf seiner ganzen Länge mit einem Filter versehen ist. Der Filterbrunnen ist dann dadurch charakterisiert, daß in jedem Punkte des Filterumrisses, d. h für $r=c=$ dem Halbmesser des Filters, die resultierende Steighöhe $P+p$ eine Konstante sein soll. Es wurde oben angenommen, daß im Bereiche des Brunnens P konstant ist, und wir können demnach uns darauf beschränken, bei gegebenen c und a, die Veränderung von p mit x zu untersuchen, wobei $a>x>-a$.

Nach Gl. (1) ist

$$p=\frac{q}{4\pi k}\ln\frac{-a-x+\sqrt{c^2+(a+x)^2}}{a-x+\sqrt{c^2+(a-x)^2}}.$$

Die zusätzliche Steighöhe p_m in der Mitte der Senkenreihe, d. h. für $x=0$, ist:

$$p_m=\frac{q}{4\pi k}\ln\frac{-a+\sqrt{c^2+a^2}}{a+\sqrt{c^2+a^2}} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots (3).$$

In der überwiegenden Anzahl praktischer Fälle ist c immer klein gegenüber a. Die obige Formel vereinfacht sich dann zu

$$p_m=\frac{q}{2\pi k}\ln\frac{c}{2a} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots (3a).$$

Das Verhältnis $\frac{p}{p_m}$ verändert sich der homogenen Senkenreihe entlang. Ihr Wert für die Verhältnisse $c=\frac{1}{10}a$, $c=\frac{1}{100}a$ und $c=\frac{1}{1000}a$ ist für das in nachstehender Tabelle angegebene Verhältnis $\frac{x}{a}$ ermittelt. Es hat sich ergeben:

wo ψ den Winkel zwischen den beiden „Steuerrichtungen" in 3 (nicht den zwischen den Bahnrichtungen!) und w_1^* die Windkomponente in der Steuerrichtung der Feldextremalen in 1 zur Zeit τ bedeutet. Hier ist wieder wegen (43′) der Faktor $\frac{\bar{\varrho}_3}{\bar{\varrho}_1}$ wesentlich positiv, ebenso der Zähler, der nur verschwindet, wenn in 3 beide Steuerrichtungen und damit auch beide Bahnrichtungen zusammenfallen. Das Vorzeichen des Nenners aber ist gleichfalls positiv, solange die Windstärke in 1 kleiner ist als die Eigengeschwindigkeit, und hängt sonst nur von der Auswahl unter den beiden einer Bahnrichtung zugehörigen Steuerrichtungen und entsprechenden Feldextremalen ab, genau wie im ebenen Falle am Schlusse von § 2. Es ist immer positiv im „spitzwinkligen", negativ im „stumpfwinkligen" Falle, und durch Integration der Gl. (57) über die ganze Vergleichsbahn $\mathfrak{C}$ zwischen 1 und 2 erhält man, wenn man $a = t_3$ durch t ersetzt,

$$\tau_2 - t_1 = \int_{t_1}^{t_2} \frac{\bar{\varrho}_3}{\bar{\varrho}_1} \frac{1 - \cos\psi}{1 + w_1^*}\, dt \gtrless 0 \text{ (im spitzwinkligen bzw. stumpfwinkligen Falle)} \quad . \; . \; . \quad (58)$$

für die ersparte Zeit, wenn man, anstatt auf der Vergleichsbahn $\mathfrak{C}$ vielmehr auf der letzten zum Endpunkt 2 gehörenden Feldextremalen fährt, um pünktlich zur Zeit t_2 in 2 einzutreffen. Auch hier ergibt sich also wie im zweidimensionalen Falle je nach der Wahl der „spitzwinkligen" oder „stumpfwinkligen" Extremalen ein Minimum oder ein Maximum der Fahrzeit innerhalb des ganzen durch diese Extremalen einfach überdeckten Feldes. 113

Einfluß von Rohrbrunnen auf die Bewegung des Grundwassers.

Von *A. Frey Samsioe*, Stockholm.

In diesem Aufsatze ist es beabsichtigt, die räumliche Bewegung des Grundwassers in einem homogenen Medium näher zu studieren, und zwar mit dem Zweck, die durch Rohrbrunnen hervorgerufenen Veränderungen der Steighöhe des Grundwassers näher kennen zu lernen.

Wir stellen uns zuerst vor, daß der grundwassertragende Boden in allen Richtungen eine unendliche Ausdehnung hat und ganz homogen ist. Wir setzen ferner voraus, daß in diesem Boden eine Grundwasserbewegung besteht, die sich im Beharrungszustande befindet. Die Steighöhe des Grundwassers, von einer bestimmten Nullebene aus gemessen, sei in jedem Punkte mit P bezeichnet. Falls in einem gewissen Bereich des Bodens keine Wasserzufuhr und keine Wasserentnahme stattfindet, gilt für P bekanntlich die Laplacesche Differentialgleichung

$$\Delta P = 0 .$$

Nehmen wir nun an, daß wir in einem Punkte eine Senke anbringen, wo wir dem Boden eine gewisse Wassermenge entziehen, geht die frühere Steighöhe P des Grundwassers in $P + p$ über. Da die neue Steighöhe $P + p$ im ganzen Bereich des Bodens, mit Ausnahme des Senkenpunktes, auch der Laplaceschen Differentialgleichung genügen muß, ergibt sich bekanntlich

$$p = -\frac{Q}{4\pi k \varrho},$$

wo

k den Darcyschen Durchlässigkeitsbeiwert des Bodens,
ϱ die Entfernung des Aufpunktes vom Senkenpunkt, und
Q die Ergiebigkeit der Senke, d. h. diejenige Wassermenge je Zeiteinheit, welche jede Kugeloberfläche, deren Mittelpunkt mit der Senke zusammenfällt, von außen nach innen durchfließt und im Punkte $\varrho = 0$ verschwindet,

bezeichnet.

Abb. 1.

Nehmen wir ferner an, daß wir anstatt einer einzigen Senke eine geradlinige Reihe von dicht aneinander in gleicher gegenseitigen Entfernung gelegenen Senken von gleicher Ergiebigkeit haben, nachstehend eine „homogene Senkenreihe" genannt, können wir die von dieser Senkenreihe hervorgerufene zusätzliche Steighöhe p wie folgt berechnen.

Es bezeichne auf Abb. 1 die Linie AB mit der Länge $2a$ die Senkenreihe mit der Ergiebigkeit q je Zeit- und Längeneinheit. Der Punkt C ist der Aufpunkt, in dem die zusätz-

liche Steighöhe berechnet werden soll. Die senkrechte Entfernung des Punktes C von der Linie AB wird mit r, die senkrechte Entfernung dieses Punktes von einer durch die Mitte von AB und senkrecht gegen AB gelegenen Ebene mit x bezeichnet. Der Beitrag zur zusätzlichen Steighöhe im Punkte C, welche von den Senken auf der Strecke $d\xi$ der Senkenreihe AB in der Entfernung ξ von deren Mitte erzeugt wird, beträgt

$$-\frac{q\,d\xi}{4\pi k\sqrt{r^2+(\xi-x)^2}},$$

und demnach wird die gesamte zusätzliche Steighöhe im Punkte C

$$p=\frac{-q}{4\pi k}\int_{-a}^{+a}\frac{d\xi}{\sqrt{r^2+(\xi-x)^2}}.$$

Durch die Substitution $z=(\xi-x)$ und Ausführung der Integration ergibt sich

$$p=\frac{q}{4\pi k}\ln\frac{-a-x+\sqrt{r^2+(a+x)^2}}{a-x+\sqrt{r^2+(a-x)^2}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1).$$

Nehmen wir nun an, daß anstatt einer einzigen homogenen Senkenreihe, N solche Senkenreihen vorhanden seien, ergibt sich die dadurch erzeugte zusätzliche Steighöhe im Aufpunkte zu

$$p=\sum_{n=1}^{n=N}\frac{q_n}{4\pi k}\ln\frac{-a_n-x_n+\sqrt{r_n^2+(a_n+x_n)^2}}{a_n-x_n+\sqrt{r_n^2+(a_n-x_n)^2}} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (2),$$

wo

q_n die aus der n-ten Senkenreihe geförderte Wassermenge je Zeit- und Längeneinheit,
$2a_n$ die Länge der n-ten Senkenreihe,
x_n die senkrechte Entfernung des Aufpunktes von einer durch die Mitte der n-ten Senkenreihe und senkrecht zu dieser gelegenen Ebene, und
r_n die senkrechte Entfernung des Aufpunktes von der n-ten Senkenreihe

bezeichnet.

Wir wollen nun untersuchen, inwiefern die oben betrachtete homogene Senkenreihe einen Filterbrunnen darstellen kann, vorausgesetzt, daß vor der Ausführung des Brunnens die Steighöhe im Bereiche des Brunnens eine gleichgroße war und der Brunnen auf seiner ganzen Länge mit einem Filter versehen ist. Der Filterbrunnen ist dann dadurch charakterisiert, daß in jedem Punkte des Filterumrisses, d. h für $r=c=$ dem Halbmesser des Filters, die resultierende Steighöhe $P+p$ eine Konstante sein soll. Es wurde oben angenommen, daß im Bereiche des Brunnens P konstant ist, und wir können demnach uns darauf beschränken, bei gegebenen c und a, die Veränderung von p mit x zu untersuchen, wobei $a > x > -a$.

Nach Gl. (1) ist

$$p=\frac{q}{4\pi k}\ln\frac{-a-x+\sqrt{c^2+(a+x)^2}}{a-x+\sqrt{c^2+(a-x)^2}}.$$

Die zusätzliche Steighöhe p_m in der Mitte der Senkenreihe, d. h. für $x=0$, ist:

$$p_m=\frac{q}{4\pi k}\ln\frac{-a+\sqrt{c^2+a^2}}{a+\sqrt{c^2+a^2}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (3).$$

In der überwiegenden Anzahl praktischer Fälle ist c immer klein gegenüber a. Die obige Formel vereinfacht sich dann zu

$$p_m=\frac{q}{2\pi k}\ln\frac{c}{2a} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (3a).$$

Das Verhältnis $\frac{p}{p_m}$ verändert sich der homogenen Senkenreihe entlang. Ihr Wert für die Verhältnisse $c=\frac{1}{10}a$, $c=\frac{1}{100}a$ und $c=\frac{1}{1000}a$ ist für das in nachstehender Tabelle angegebene Verhältnis $\frac{x}{a}$ ermittelt. Es hat sich ergeben:

		$c=\frac{1}{10}a$	$c=\frac{1}{100}a$	$c=\frac{1}{1000}a$
$x=0$	$\frac{p}{p_m}=$	1,000	1,000	1,000
$x=0{,}2\,a$	„ =	0,994	0,996	0,997
$x=0{,}4\,a$	„ =	0,972	0,984	0,989
$x=0{,}6\,a$	„ =	0,928	0,958	0,971
$x=0{,}8\,a$	„ =	0,839	0,904	0,933
$x=0{,}9\,a$	„ =	0,754	0,843	0,891
$x=a$	„ =	0,616	0,565	0,545

Aus der Tabelle ist zu ersehen, daß bei solchen Abmessungen des Filterbrunnens, die in der Praxis vorkommen, die Veränderung von p bei konstantem c der homogenen Senkenreihe entlang unbeträchtlich ist mit Ausnahme von einer Absenkung des absoluten Betrages des p-Wertes am Ende der Senkenreihe.

Es bietet keine Schwierigkeiten, die Veränderung der Ergiebigkeit einem wirklichen Filterbrunnen entlang annähernd zu ermitteln. Dies kann dadurch geschehen, daß man den Filterbrunnen mit dem Halbmesser c durch eine Anzahl N von homogenen Senkenreihen längs derselben geraden Linie und mit derselben Mitte, aber von verschiedenen Längen $2\,a_n$ und verschiedenen Ergiebigkeiten q_n ersetzt. Die Ergiebigkeiten q_n der verschiedenen Senkenreihen, die sozusagen wie in einem chinesischen Ei ineinander stecken, lassen sich durch die Bedingung bestimmen, daß die zusätzliche Steighöhe, die von dem Komplex erzeugt wird, in N Punkten (c, x_m) dem Brunnen entlang gleichgroß sein soll.

Durch diese Bedingung erhält man demnach N Gleichungen

$$4\pi k p = \sum_{n=1}^{n=N} q_n \ln \frac{-a_n - x_m + \sqrt{c^2+(a_n+x_m)^2}}{a_n - x_m + \sqrt{c^2+(a_n-x_m)^2}}$$

für $m=1, 2, 3$ usw. bis N, aus denen die N Unbekannten q_n berechnet werden können.

Die Berechnung ist durchgeführt worden für die Verhältnisse $c=\frac{1}{10}a$, $c=\frac{1}{100}a$ und $c=\frac{1}{1000}a$ sowie für $N=5$, und zwar mit den folgenden Werten von a_n und x_m:

$$\begin{aligned} a_1 &= 0{,}6\;a & x_1 &= 0 \\ a_2 &= 0{,}85\,a & x_2 &= 0{,}725\,a \\ a_3 &= 0{,}95\,a & x_3 &= 0{,}900\,a \\ a_4 &= 0{,}98\,a & x_4 &= 0{,}965\,a \\ a_5 &= 1{,}00\,a & x_5 &= 0{,}990\,a \end{aligned}$$

Es ergeben sich folgende Werte von q_1 bis q_5:

	$c=\frac{1}{10}a$	$c=\frac{1}{100}a$	$c=\frac{1}{1000}a$
$q_1=$	$+0{,}0120\cdot 4\pi k p$,	$+0{,}0084\cdot 4\pi k p$,	$+0{,}0039\cdot 4\pi k p$,
$q_2=$	$+0{,}1715\cdot$ „	$+0{,}0137\cdot$ „	$+0{,}0059\cdot$ „
$q_3=$	$-2{,}7612\,.$ „	$+0{,}0140\cdot$ „	$+0{,}0077\cdot$ „
$q_4=$	$+7{,}6001\cdot$ „	$+0{,}1232\cdot$ „	$+0{,}0190\cdot$ „
$q_5=$	$-5{,}1737\cdot$ „	$-0{,}2517\cdot$ „	$-0{,}1019\cdot$ „

Die Wassermenge je Längeneinheit in den verschiedenen Teilen des Brunnens ergibt sich demnach wie folgt:

		$c=\frac{1}{10}a$	$c=\frac{1}{100}a$	$c=\frac{1}{1000}a$
von $x=0$	bis $x=0{,}60\,a$	$-0{,}1513\cdot 4\pi k p$,	$-0{,}0924\cdot 4\pi k p a$,	$-0{,}0654\cdot 4\pi k p$,
„ $x=0{,}60\,a$	„ $x=0{,}85\,a$	$-0{,}1633\cdot$ „	$-0{,}1008\cdot$ „	$-0{,}0693\cdot$ „
„ $x=0{,}85\,a$	„ $x=0{,}95\,a$	$-0{,}3348\cdot$ „	$-0{,}1145\cdot$ „	$-0{,}0725\cdot$ „
„ $x=0{,}95\,a$	„ $x=0{,}98\,a$	$+2{,}4264\cdot$ „	$-0{,}1285\cdot$ „	$-0{,}0829\cdot$ „
„ $x=0{,}98\,a$	„ $x=1{,}00\,a$	$-5{,}1737\cdot$ „	$-0{,}2517\cdot$ „	$-0{,}1019\cdot$ „
Mittelwert		$-0{,}1958\cdot$ „	$-0{,}1010\cdot$ „	$-0{,}0686\cdot$ „
Gesamtergiebigkeit		$-0{,}3916\cdot 4\pi k p a$,	$-0{,}2020\cdot 4\pi k p a$,	$-0{,}1372\cdot 4\pi k p a$.

Berechnet man die Ergiebigkeit q der homogenen Senkenreihe, die die zusätzliche Steighöhe p bei $x=0$ und $r=c$ hervorruft, erhält man nach Gl. (3) bzw. (3a)

$$c=\frac{1}{10}a \qquad c=\frac{1}{100}a \qquad c=\frac{1}{1000}a$$

$$q=-0{,}1667\cdot 4\pi k p,\quad -0{,}0944\cdot 4\pi k p,\quad -0{,}0658\cdot 4\pi k p.$$

Es ergibt sich somit, daß die wirkliche Wassermenge, die man einem Filterbrunnen entnehmen kann, durchschnittlich größer ist als diejenige, die man bei Verwendung der obigen einfachen Gl. (3) bzw. (3a) erhält. Den Fehler in der Gesamtergiebigkeit des Brunnens kann man zu weniger als 1 vH herabdrücken, indem man mit einer Senkenreihe von der Länge $2a_1=2a+2c$ rechnet und die richtige zusätzliche Steighöhe bei $x=\frac{2}{3}a_1$ ansetzt. Das Rechnungsergebnis ist folgendes:

		$c=\frac{1}{10}a$	$c=\frac{1}{100}a$	$c=\frac{1}{1000}a$
	$q_1=$	$-0{,}1781\cdot 4\pi k p$,	$-0{,}0997\cdot 4\pi k p$,	$-0{,}0684\cdot 4\pi k p$
Gesamtergiebigkeit	$q_1 a_1$	$-0{,}3919\cdot 4\pi k p a$,	$-0{,}2014\cdot 4\pi k p a$,	$-0{,}1370\cdot 4\pi k p a$.

Die obige Verbesserung ist vielleicht aus theoretischen Gründen interessant, aber für praktische Zwecke kaum nötig, sondern, da sie eine Komplikation mit sich bringt, sogar lästig. Wenn man nämlich alle anderen Ungenauigkeiten in Betracht nimmt, unter denen die praktische Rechnung zu leiden hat, wie z. B. die Feststellung des Durchlässigkeitsbeiwertes, der auch bei anscheinend homogenem Boden zwischen recht großen Grenzen schwankt, scheint es durchaus zulässig, von den Veränderungen des p-Wertes der homogenen Senkenreihe entlang bzw. den Veränderungen der wirklichen Brunnenergiebigkeit dem Filterbrunnen entlang abzusehen und die homogene Senkenreihe als eine mathematische Darstellung eines Filterbrunnens mit konstantem Halbmesser c anzusehen, wobei die zusätzliche Steighöhe dem ganzen Filterumriß entlang ungefähr gleich p_m ist, und wo die Ergiebigkeit q aus Gl. (3) bzw. (3a) ermittelt werden kann.

Durch das oben entwickelte Rechnungsverfahren lassen sich mit Hilfe einiger Kniffe viele Probleme der Grundwasserbewegung, die früher mehr oder weniger unzugänglich waren, rechnerisch ermitteln.

Wir wollen uns zuerst mit dem folgenden Falle beschäftigen. Es sei (vgl. Abb. 2) ein bis auf große Tiefe sich erstreckender grundwassertragender Sandboden von einer undurchlässigen Tonschicht überlagert. Die natürliche Steighöhe P des gespannten Grundwassers, von einer gewissen Nullebene aus gemessen, sei durch die strichpunktierte Linie bezeichnet. Es wird die Frage gestellt: Wie groß ist die Ergiebigkeit eines Brunnens, der den Halbmesser $r=c$ hat und um die Länge a in die wassertragende Schicht hineinragt, wenn der gespannte Wasserspiegel am Rande des Brunnens um das Maß $-p_1$ unter die natürliche Steighöhe abgesenkt wird?

Abb. 2.

Bis jetzt haben wir stets eine Senkenreihe in einem in allen Richtungen homogenen Boden betrachtet. Es ist klar, daß die Ebene $x=0$ in diesem Falle eine Symmetrieebene der Grundwasserbewegung bildet, und daß kein Wasser durch diese Ebene fließt. Es ist deshalb von keinem Belang für die Wasserbewegung, falls diese Ebene durch eine undurch-

lässige Scheidewand ersetzt wird. Nachdem dies geschehen ist, wird das auf einer beliebigen Seite dieser Wand sich bewegende Grundwasser von der Wasserbewegung auf der anderen Seite in keiner Beziehung beeinflußt, und der Grundwasserträger auf der anderen Seite der Scheidewand kann deshalb entfernt und durch etwas anderes ersetzt werden.

Um die oben aufgestellte Aufgabe zu lösen, stellen wir uns nun zuerst vor, daß die Senkenreihe, durch welche wir den Brunnen ersetzen wollen, symmetrisch in bezug auf die Trennungsebene $A - A$ zwischen dem Sand und dem Ton ist, die Länge $2a$ hat und in einem in allen Richtungen homogenen Boden steht. Wir werden die Rechnung mit Hilfe einer homogenen Senkenreihe durchführen, obgleich es keine Schwierigkeit bietet, eine der oben berechneten zusammengesetzten Senkenreihen zu verwenden, denn die durch die letztere erhaltene größere mathematische Genauigkeit ist, wie oben erwähnt, ohne Belang, und die Komplikation ist für praktische Rechnungen nur lästig. Die Ergiebigkeit q je Zeit- und Längeneinheit der homogenen Senkenreihe berechnet sich nach den vorstehenden Erörterungen wie folgt. Es ist nach Gl. (3a)

$$p_1 \sim p_m \sim \frac{q}{2\pi k} \ln \frac{c}{2a} \text{ [1]}$$

und demnach

$$q \sim \frac{2\pi k p_1}{\ln \frac{c}{2a}}.$$

Wenn wir uns nun die Ebene $x = 0$ als undurchlässig vorstellen und die obere Hälfte der Senkenreihe sowie den über dieser Ebene gelegenen Teil des homogenen Bodens entfernen, hat diese Amputation keinen Einfluß auf die Grundwasserbewegung unterhalb der Ebene $x = 0$, und die je Zeiteinheit aus dem wirklichen Brunnen geförderte Wassermenge berechnet sich demnach zu

$$q a \sim \frac{2\pi k p_1 a}{\ln \frac{c}{2a}}.$$

Mit Hilfe der oben erwähnten Methode können wir auch die Äquipotentiale in einem Vertikalschnitt durch die Brunnenachse aufzeichnen, um die Stromfaden und die Steighöhenverhältnisse zu studieren. Dies geschieht dadurch, daß man laut der Formel

$$p = \frac{q}{4\pi k} \ln \frac{-a - x + \sqrt{r^2 + (a+x)^2}}{+a - x + \sqrt{r^2 + (a-x)^2}}$$

den Wert von p für verschiedene Punkte (x, r) berechnet. Nachdem p für eine genügende Anzahl von Punkten berechnet worden ist, verbindet man diejenigen Punkte, die denselben Wert von p haben, und erhält dadurch die Äquipotentiallinie für den betreffenden p-Wert. Diese Operation ist für einen Filterbrunnen mit $c = \frac{1}{100} a$ durchgeführt und das Ergebnis auf Abb. 3 dargestellt worden. Nachdem die Äquipotentiallinien graphisch dargestellt worden sind, können die Stromfaden eingelegt werden, da in homogenem Boden diese immer die Äquipotentiallinien senkrecht schneiden müssen.

Abb. 3.

Es sei in diesem Zusammenhange erwähnt, daß im allgemeinen bei der Grundwasserbewegung im Raume die Äquipotentiallinien und die Stromfaden sich nicht durch ein Netz mit quadratischen Maschen darstellen lassen. Dies kann nur dann geschehen, wenn die Grundwasserbewegung zweidimensional ist, d. h. wenn die Bewegung immer parallel zu einer Ebene erfolgt. Ist die Bewegung, wie im vorliegenden Falle, zylindersymmetrisch, werden die Äquipotentiallinien und die Stromfaden, wenn in einer vertikalen Schnittfläche durch die Achse dargestellt, ein rektangulares Maschennetz bilden, wo das Seitenverhältnis der Rektangel von deren Entfernung von der Brunnenachse abhängt. Nehmen wir an, daß der Steighöhenunterschied zwischen den Äquipotentiallinien gleich der Längeneinheit ist, und daß jeder

[1] Das Zeichen $\sim$ ist hier und in dem Folgenden angewandt, um „ungefähr gleich" zu bezeichnen.

Stromfaden die Einheitswassermenge k darstellt, welche in der Zeiteinheit einen Würfel mit der Seitenlänge gleich der Längeneinheit durchfließt, wenn der Steighöhenunterschied zwischen zwei parallelen Seitenflächen gleich der Längeneinheit ist, so wird das Verhältnis zwischen dem Abstand der Äquipotentiallinien und dem Abstand der Stromfaden immer gleich $\frac{2\pi r}{n}$, wenn $\frac{2\pi}{n}$ den Zentrumwinkel desjenigen Sektors bedeutet, in dem die Wasserbewegung auf der Zeichnung dargestellt ist. Die gesamte, dem Brunnen zufließende Wassermenge kann man dadurch erhalten, daß man die Anzahl der Stromfaden rechnet, die auf der einen Seite des Brunnens münden, und diese Anzahl mit kn multipliziert.

Wir wollen nun den folgenden Fall untersuchen. Es sei nach Abb. 4 eine grundwassertragende Sandschicht von der Höhe b zwischen zwei undurchlässigen Tonschichten eingeschlossen. Die natürliche Steighöhe P des gespannten Grundwassers, von einer gewissen Nullebene aus gemessen, sei durch die strichpunktierte Linie bezeichnet. Es wird die Frage gestellt: Wie groß ist die Ergiebigkeit eines „unvollkommenen" Filterbrunnens, der den Halbmesser c_1 hat und um die Länge a in die wassertragende Schicht hineinragt, im Vergleich zu der Ergiebigkeit eines „vollkommenen" Filterbrunnens, der den Halbmesser c_2 hat und die ganze Sandschicht durchfährt, und zwar in beiden Fällen bei derselben Spiegelabsenkung $-p_1$?

Abb. 4

Abb. 5

Um Symmetrieebenen für die Grundwasserbewegung sowohl in der unteren Ebene der oberen Tonschicht, in der Abbildung mit AA bezeichnet, als in der oberen Ebene der unteren Tonschicht, in der Abbildung mit BB bezeichnet, bei einem den ganzen Raum füllenden homogenen Medium zu erhalten, können wir uns folgende Anordnung denken. Es seien nach Abb. 5 Senkenreihen, je von der Länge $2a$, längs derselben geraden Linie in einer gegenseitigen Entfernung von $2b$ von Mittpunkt zu Mittpunkt angeordnet. Ist die Anzahl dieser Senkenreihen unendlich groß, werden die Ebenen AA und BB offenbar Symmetrieebenen, die nicht vom Wasser durchflossen werden und daher durch undurchlässige Scheidewände ersetzt werden können, ohne die Grundwasserbewegung zwischen ihnen zu beeinflussen. Wir haben dann zwischen diesen beiden Ebenen einen Bewegungszustand, der die Lösung der Aufgabe gibt.

Die Rechnung wollen wir in folgender Weise durchführen. Wir berücksichtigen zuerst eine gewisse endliche Anzahl $2N+1$ der den Ebenen AA und BB zunächstliegenden Senkenreihen, die jede eine Länge $2a$ haben und symmetrisch um AA angeordnet sind. Weiter ersetzen wir die entfernteren Senkenreihen durch zwei beliebig lange Senkenreihen, die in der Entfernung $\pm(2N+1)b$ von AA anfangen und eine Ergiebigkeit von je $\frac{a}{b}\cdot q$ haben, wenn q die Ergiebigkeit je Längeneinheit der oben erwähnten Senkenreihen mit der Länge je $2a$ bedeutet.

Um die vorstehend entwickelten Formeln für die beliebig langen Senkenreihen besser geeignet zu machen, führen wir die Substitutionen $y=x-a$ und $l=2a$ in Gl. (1) ein und erhalten

$$p=\frac{q}{4\pi k}\ln\frac{-l-y+\sqrt{r^2+(l+y)^2}}{-y+\sqrt{r^2+y^2}} \qquad (4),$$

wo also y die senkrechte Entfernung des Aufpunktes von einer durch das Senkenreihenende und senkrecht zur Senkenreihe gelegenen Ebene bezeichnet, r dieselbe Bedeutung wie früher hat und l die Länge der Senkenreihe ist.

Wir nehmen den Schnittpunkt der Ebene AA mit der Linie, längs welcher die Senkenreihen angeordnet sind, zum Anfangspunkt eines zylindrischen Koordinatensystems z, r. Die Mitte der anderen kurzen Senkenreihen liegen demnach in der Entfernung $z = \pm 2\,n\,b$ ($n =$ 1, 2, 3 usw. bis N), und die langen Senkenreihen haben ihre Enden in der Entfernung $z = \pm (2\,N+1)\,b$ vom Anfangspunkt.

Die zusätzliche Steighöhe im Punkte z, r ist demnach

$$\left.\begin{aligned} p = \frac{q}{4\pi k}\Bigg\{ & \ln \frac{-a-z+\sqrt{r^2+(a+z)^2}}{a-z+\sqrt{r^2+(a-z)^2}} \\ & + \sum_{n=1}^{n=N} \ln \frac{-a-(2nb+z)+\sqrt{r^2+(a+2nb+z)^2}}{a-(2nb+z)+\sqrt{r^2+(a-2nb-z)^2}} \\ & + \sum_{n=1}^{n=N} \ln \frac{-a-(2nb-z)+\sqrt{r^2+(a+2nb-z)^2}}{a-(2nb-z)+\sqrt{r^2+(a-2nb+z)^2}}\Bigg\} \\ & + \frac{q\,a}{4\pi k b}\Bigg\{\ln \frac{-l-\{(2N+1)b+z\}+\sqrt{r^2+\{l+(2N+1)b+z\}^2}}{-\{(2N+1)b+z\}+\sqrt{r^2+\{(2N+1)b+z\}^2}} \\ & + \ln \frac{-l-\{(2N+1)b-z\}+\sqrt{r^2+\{l+(2N+1)b-z\}^2}}{-\{(2N+1)b-z\}+\sqrt{r^2+\{(2N+1)b-z\}^2}}\Bigg\} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (5).$$

Aus dieser Gleichung läßt sich ein interessanter Umstand erblicken. Wenn man l ins Unendliche wachsen läßt, wird auch $-p$ unendlich groß. Dieser Umstand hängt mit der Tatsache zusammen, daß, wenn die Wasserteilchen gezwungen sind, sich in parallelen Ebenen radiell nach einer Linie hin zu bewegen, eine unendlich große Absenkung der Steighöhe in jeder endlichen Entfernung von der Entnahmestelle erforderlich ist, um diese Bewegung zu erzielen, falls die beschriebene ebene Bewegung auch in Unendlichferne stattfinden soll. In Wirklichkeit erstreckt sich jedoch die vorausgesetzte Schichtenfolge im Boden nicht in Unendlichferne. Wenn man r wachsen läßt, kommt man in Wirklichkeit früher oder später zu einem Ort, wo die angenommene Schichtenfolge aufhört, oder wo aus anderen Ursachen die Steighöhe des Grundwassers durch die Entnahme bei $r = 0$ nicht beeinflußt wird. Wir nennen die Entfernung R vom Brunnen, wo dies stattfindet, die „Reichweite des Brunnens".

Um auf diesen Umstand Bezug zu nehmen, müssen wir zur rechten Seite der Gl. (5) eine Konstante hinzufügen, so daß bei $r = R$ die zusätzliche Steighöhe p verschwindet.

Es ist klar, daß die zusätzliche Steighöhe p_R, die man aus der obigen Gleichung berechnet, wenn R ziemlich groß ist, annähernd dieselbe wird wie diejenige, welche im Punkte $r = R$ und $z = o$ von einer homogenen Senkenreihe, die die Ergiebigkeit $q\,\frac{a}{b}$ hat und die bis zu den Punkten $z = \pm \{l + (2\,N+1)\,b\}$ reicht, erzeugt wird. Es ergibt sich demnach nach Gl. (1)

$$p_R = \frac{q\,a}{4\pi k b} \ln \frac{-\{l+(2N+1)b\}+\sqrt{R^2+\{l+(2N+1)b\}^2}}{\{l+(2N+1)b\}+\sqrt{R^2+\{l+(2N+1)b\}^2}}.$$

Lassen wir nun $l + (2\,N+1)\,b$ gegenüber R groß werden, erhalten wir

$$p_R = \frac{q\,a}{4\pi k b} \ln \frac{R^2}{4\,\{l+(2N+1)b\}^2} \quad \ldots\ldots \quad (6).$$

Die Konstante, die der Gl. (5) hinzugefügt werden soll, ist demnach der oben erhaltene Wert von p_R mit umgekehrtem Zeichen. Wir teilen diese Konstante in zwei gleichgroße Teile und addieren diese Teile zu je einem der beiden Glieder innerhalb der zweiten geschweiften Klammer der Gl. (5). Das erste dieser Glieder wird somit

$$\frac{q\,a}{4\pi k b} \ln \frac{-l-(2N+1)b-z+\sqrt{r^2+\{l+(2N+1)b+z\}^2}}{-(2N+1)b-z+\sqrt{r^2+\{(2N+1)b+z\}^2}} \cdot \frac{2\{l+(2N+1)b\}}{R}.$$

Lassen wir nun l unendlich groß werden, läßt sich dieser Ausdruck schreiben

$$\frac{q\,a}{4\pi k b} \ln \frac{r^2}{R\left[-(2N+1)b-z+\sqrt{r^2+\{(2N+1)b+z\}^2}\right]}.$$

Für das zweite Glied erhalten wir denselben Ausdruck, nur mit dem Unterschied, daß $+z$ gegen $-z$ ausgetauscht wird.

Der endgültige Ausdruck der zusätzlichen Steighöhe p wird somit

$$\left.\begin{aligned} p = \frac{q}{4\pi k}\Bigg\{ &\ln \frac{-a-z+\sqrt{r^2+(a+z)^2}}{a-z+\sqrt{r^2+(a-z)^2}} \\ &+ \sum_{n=1}^{n=N} \ln \frac{-a-(2nb+z)+\sqrt{r^2+(a+2nb+z)^2}}{a-(2nb+z)+\sqrt{r^2+(a-2nb-z)^2}} \\ &+ \sum_{n=1}^{n=N} \ln \frac{-a-(2nb-z)+\sqrt{r^2+(a+2nb-z)^2}}{a-(2nb-z)+\sqrt{r^2+(a-2nb+z)^2}} \Bigg\} \\ &+ \frac{qa}{4\pi kb}\Bigg\{ \ln \frac{r^2}{R\left[-(2N+1)b-z+\sqrt{r^2+\{(2N+1)b+z\}^2}\right]} \\ &+ \ln \frac{r^2}{R\left[-(2N+1)b+z+\sqrt{r^2+\{(2N+1)b-z\}^2}\right]} \Bigg\} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots (7).$$

Setzen wir in diese Gleichung $a = b$, ergibt sich identisch

$$p = \frac{q}{4\pi k} \ln \frac{r^2}{R^2},$$

wie es auch sein soll.

Im besonderen interessiert uns der Wert der rechten Seite von Gl. (7), wenn $r = c_1$ und $z = o$. Setzen wir diese Werte in die Gleichung ein und berücksichtigen, daß c_1 gegenüber a, b usw. klein ist, erhalten wir

$$p \sim \frac{q}{2\pi k}\left\{ \ln \frac{c_1}{2a} + \sum_{n=1}^{n=N} \ln \frac{2nb-a}{2nb+a} + \frac{a}{b} \ln \frac{2(2N+1)b}{R} \right\}.$$

Um den Wert dieses Ausdruckes zu berechnen, entwickeln wir die Glieder, aus denen die Summe besteht, und die wir für einen Augenblick mit S bezeichnen wollen, in Reihen wie folgt

$$S = \sum_{n=1}^{n=N} \ln \frac{1-\frac{a}{2nb}}{1+\frac{a}{2nb}} = -2 \sum_{n=1}^{n=N} \left\{ \frac{a}{2nb} + \frac{1}{3}\left(\frac{a}{2nb}\right)^3 + \frac{1}{5}\left(\frac{a}{2nb}\right)^5 + \frac{1}{7}\left(\frac{a}{2nb}\right)^7 + \ldots \right\}.$$

Summieren wir ein jedes dieser Glieder für sich, ergibt sich

$$S = -2\left\{ \frac{a}{2b} \sum_1^N \frac{1}{n} + \frac{1}{3}\left(\frac{a}{2b}\right)^3 \sum_1^N \frac{1}{n^3} + \frac{1}{5}\left(\frac{a}{2b}\right)^5 \sum_1^N \frac{1}{n^5} + \frac{1}{7}\left(\frac{a}{2b}\right)^7 \cdot \sum_1^N \frac{1}{n^7} + \ldots \right\}.$$

Die Summen berechnen sich annähernd, wenn N groß ist, wie folgt:

$$\lim_{N\to\infty} \sum_1^N \frac{1}{n} = 0{,}58 + \ln N, \quad \sum_1^\infty \frac{1}{n^3} = 1{,}22,$$

$$\sum_1^\infty \frac{1}{n^5} = 1{,}04, \qquad \sum_1^\infty \frac{1}{n^7} = 1{,}01.$$

Die mit S bezeichnete Summe wird demnach

$$S = -\frac{a}{b} \ln N - 0{,}58\,\frac{a}{b} - 0{,}102\left(\frac{a}{b}\right)^3 - 0{,}013\left(\frac{a}{b}\right)^5 - 0{,}002\left(\frac{a}{b}\right)^7 - \ldots$$

Wir haben dann annähernd

$$p \sim \frac{q}{2\pi k}\left\{ \ln \frac{c_1}{2a} - \frac{a}{b} \ln N - 0{,}58\,\frac{a}{b} - 0{,}102\left(\frac{a}{b}\right)^3 + \frac{a}{b} \ln\left(N + \frac{1}{4}\right) + \frac{a}{b} \ln \frac{4b}{R} \right\}.$$

Falls N groß ist, ist $\ln N$ sehr wenig von $\ln\left(N+\frac{1}{4}\right)$ verschieden, und wir können deshalb die zwei Glieder, die $\ln N$ und $\ln\left(N+\frac{1}{4}\right)$ enthalten, überstreichen. Wir erhalten dann

$$p \sim \frac{q}{2\pi k}\left\{\ln \frac{c_1}{2a}\cdot\left(\frac{4b}{R}\right)^{\frac{a}{b}} - 0{,}58\,\frac{a}{b} - 0{,}102\left(\frac{a}{b}\right)^3\right\}.$$

Es ist aber

$$0{,}4 \ln \frac{1-0{,}72\,\frac{a}{b}}{1+0{,}72\,\frac{a}{b}} = -0{,}8\left\{0{,}72\,\frac{a}{b} + \frac{0{,}72^3}{3}\left(\frac{a}{b}\right)^3 + \ldots\right\},$$

was annähernd gleich den beiden letzten Gliedern im Ausdruck für p ist, und wir können demnach schreiben

$$p \sim \frac{q}{2\pi k}\ln \frac{c_1}{2a}\cdot\left(\frac{4b}{R}\right)^{\frac{a}{b}}\cdot\left(\frac{b-0{,}72a}{b+0{,}72a}\right)^{0{,}40}.$$

Setzen wir in diese Gleichung $a=b$, ergibt sich

$$p = \frac{q}{2\pi k}\ln\frac{c}{R}\cdot 0{,}97,$$

was genügend genau stimmt.

Soll der „unvollkommene" Brunnen mit dem Halbmesser c_1 und der Länge a ebenso viel Wasser geben wie ein „vollkommener" Brunnen mit dem Halbmesser c_2 und der Länge b, muß bei derselben zusätzlichen Steighöhe p die Ergiebigkeit des letzteren $q\,\frac{a}{b}$ sein. Wir haben dann

$$\frac{q}{2\pi k}\ln\frac{c_1}{2a}\cdot\left(\frac{4b}{R}\right)^{\frac{a}{b}}\cdot\left(\frac{b-0{,}72a}{b+0{,}72a}\right)^{0{,}4} = \frac{q\cdot\frac{a}{b}}{2\pi k}\ln\frac{c_2}{R}$$

oder

$$\frac{c_1}{2a}\cdot\left(\frac{4b}{R}\right)^{\frac{a}{b}}\cdot\left(\frac{b-0{,}72a}{b+0{,}72a}\right)^{0{,}4} = \left(\frac{c_2}{R}\right)^{\frac{a}{b}}$$

oder

$$c_1 = 2a\cdot\left(\frac{b+0{,}72a}{b-0{,}72a}\right)^{0{,}4}\cdot\left(\frac{c_2}{4b}\right)^{\frac{a}{b}}.$$

Setzen wir wie früher $c_2=\frac{1}{10}b$, $\frac{1}{100}b$ und $\frac{1}{1000}b$, ergibt sich folgende Tafel für verschiedene Verhältnisse $a:b$

		$c_2=\frac{1}{10}b$	$c_2=\frac{1}{100}b$	$c_2=\frac{1}{1000}b$
$\frac{a}{b}=\frac{3}{4}$	$c_1=$	$1{,}53\,c_2$	$2{,}53\,c_2$	$4{,}80\,c_2$
$\frac{a}{b}=\frac{1}{2}$	$c_1=$	$2{,}10\,c_2$	$6{,}75\,c_2$	$21{,}0\,c_2$
$\frac{a}{b}=\frac{1}{4}$	$c_1=$	$2{,}30\,c_2$	$13{,}0\,c_2$	$73{,}0\,c_2$

Wollen wir statt dessen die Wassermenge Q_a, die aus dem unvollkommenen Brunnen gefördert wird, mit der Wassermenge Q_b vergleichen, die der vollkommene Brunnen mit demselben Durchmesser c bei derselben zusätzlichen Steighöhe liefert, haben wir

$$Q_a = q \cdot a = \frac{p \cdot 2\pi k a}{\ln \frac{c}{2a} \cdot \left(\frac{4b}{R}\right)^{\frac{a}{b}} \cdot \left(\frac{b - 0{,}72a}{b + 0{,}72a}\right)^{0{,}4}},$$

$$Q_b = \frac{p \cdot 2\pi k b}{\ln \frac{c}{R}}$$

und demnach

$$\frac{Q_a}{Q_b} = \frac{a}{b} \cdot \frac{\ln \frac{c}{R}}{\ln \frac{c}{2a} \cdot \left(\frac{4b}{R}\right)^{\frac{a}{b}} \cdot \left(\frac{b - 0{,}72a}{b + 0{,}72a}\right)^{0{,}4}}.$$

Setzen wir $R = 100b$, ergibt sich folgende Tafel:

		$c = \frac{1}{10} b$	$c = \frac{1}{100} b$	$c = \frac{1}{1000} b$
$a = \frac{3}{4} b$	$\frac{Q_a}{Q_b} =$	0,93	0,87	0,85
$a = \frac{1}{2} b$	$\frac{Q_a}{Q_b} =$	0,82	0,71	0,65
$a = \frac{1}{4} b$	$\frac{Q_a}{Q_b} =$	0,67	0,47	0,40

Das erwähnte Rechnungsverfahren ist beim Entwurf einer Grundwasserentspannungsanlage am Bauplatze des Kraftwerkes Swir 3 in Rußland zur Anwendung gekommen.

Der Boden, auf dem das Wehr und das Krafthaus gegründet werden müssen, besteht zu großer Tiefe aus devonischen Ablagerungen, in welchen annähernd horizontale, dünne, lehmige und sandige Tonschichten abwechseln. Das Devon ist grundwassertragend, und die Steighöhe des Grundwassers nimmt mit zunehmender Tiefe zu bis zu einer gewissen Grenze, wo das Grundwasser mehr als 5 m über dem Wasserspiegel des Swir-Flusses ansteigt. Trägt man die Äquipotentiallinien des natürlichen Grundwassers auf einen Querschnitt durch den Flußlauf ein, wo der Höhenmaßstab 20 mal größer gewählt ist als der Längenmaßstab, ersieht man aus der Form der Äquipotentiallinien, daß die Bewegung des Grundwassers in dem in dieser Weise verzerrten Querschnitt mit dessen Bewegung in einem homogenen Medium annähernd identisch wird.

Von dieser Tatsache ausgehend können wir zuerst das Verhältnis des Durchlässigkeitsbeiwertes in horizontaler Richtung zu demjenigen in vertikaler Richtung berechnen.

Zu diesem Zweck nehmen wir an, daß eine Grundwasserbewegung in einem Medium stattfindet, dessen Durchlässigkeit in horizontaler Richtung von derjenigen in vertikaler Richtung verschieden ist, und daß die Schnittlinien zwischen den Äquipotentialflächen und den beliebigen Ebenen, die man durch das Medium legen kann, zeichnerisch in einem verzerrten Maßstab dargestellt sind, dessen Verzerrung so gewählt ist, daß die Äquipotential- und Stromlinien dabei dieselbe Form erhalten, als wenn die Grundwasserbewegung in einem homogenen Medium stattfände und die Äquipotential- und Stromlinien in unverzerrtem Maßstab dargestellt wären. Das Verhältnis zwischen dem Längenmaßstab und dem Höhenmaßstab sei mit α bezeichnet (also z. B. $\alpha = {}^1/_{2000} : {}^1/_{100} = {}^1/_{20}$).

Wir betrachten nun einen Würfel mit vertikaler Kante von der Länge a, im Längenmaßstab der Zeichnung gemessen. Wir nehmen ferner an, daß zwischen zwei einander gegenüberstehenden Seitenflächen ein piezometrischer Druckunterschied gleich der Längeneinheit herrscht. Die durch diese Flächen fließende Wassermenge q beträgt somit

$$q = k \cdot \frac{1}{a} \cdot a \cdot a = k a.$$

Dem betrachteten Würfel entspricht in der Wirklichkeit ein Parallelipiped mit einem horizontalen Querschnitt a^2 und einer vertikalen Höhe αa.

Bei horizontalem Durchfluß wird

$$q = k_h \frac{1}{a} \cdot a \cdot \alpha a = k_h \cdot \alpha a,$$

wo k_h den Durchlässigkeitsbeiwert in horizontaler Richtung bezeichnet.

Bei vertikalem Durchfluß wird

$$q = k_v \frac{1}{\alpha a} \cdot a \cdot a = k_v \frac{a}{\alpha},$$

wo k_v den Durchlässigkeitsbeiwert in vertikaler Richtung bezeichnet.

Da q der Voraussetzung nach in allen drei Fällen gleichgroß sein muß, ergibt sich

$$k = \alpha k_h = \frac{1}{\alpha} k_v,$$

woraus

$$k_v = \alpha^2 \cdot k_h,$$

und

$$k = \sqrt{k_h \cdot k_v}.$$

Aus den vorstehenden Ausführungen geht hervor, daß, wenn auf der Zeichnung im verzerrten Maßstab sowohl die horizontalen als die vertikalen Maße in dem angegebenen Längenmaßstab gemessen werden, man so zu rechnen hat, als ob der Boden homogen wäre und einen Durchlässigkeitsbeiwert von $k = \sqrt{k_h \cdot k_v}$, also das geometrische Mittel zwischen den Durchlässigkeitsbeiwerten in horizontaler und vertikaler Richtung, hätte.

Nach dieser Ausweichung kehren wir zu den Verhältnissen in Swir 3 zurück. Es galt dort, innerhalb leergepumpter Fangedämme Einschnitte in das grundwassertragende Devon zu machen, um die Bauwerke herstellen zu können. Berechnungen über die Druckverhältnisse im Devon ergaben, daß bei ausgehobener und leergepumpter Baugrube der Druckanstieg im Boden unter der Baugrubensohle bis zu einer gewissen Tiefe größer werden würde als das Gewicht des Erdreichs, falls keine besonderen Maßnahmen vorgenommen würden. Um die Gefahr eines Auftriebs zu beseitigen, wurde zur Entspannung des Grundwasserdrucks eine Rohrbrunnenanlage entworfen, die auf Abb. 6 schematisch angedeutet ist. Auf der Abbildung ist auch die natürliche Steighöhe P des Grundwassers durch eingetragene Äquipotentiallinien dargestellt. Bei der Berechnung der Einwirkung der Brunnenanlage handelte es sich nun darum, eine Funktion p zu finden, die folgende Bedingungen erfüllen sollte:

1. Am Rande jedes Filterbrunnens sollte $P + p$ gleich dem abgesenkten Wasserspiegel in der Brunnenanlage sein.

2. Am Rande der ausgehobenen Baugrube sollte die Steighöhe $P + p$ gleich derjenigen Kote sein, wo dort das Grundwasser zu Tage tritt.

Abb. 6.

Diesen beiden Bedingungen konnte annähernd genügt werden, indem man die Filterbrunnen durch homogene Senkenreihen ersetzte, die auch, wie Abb. 7 andeutet, in die künftige Baugrube hineinragten. Wie weit sie in die Baugrube hineinragen sollten, um die zweite Bedingung mit genügender Genauigkeit zu erfüllen, wurde versuchsweise ermittelt.

Nachdem die Länge der homogenen Senkenreihen bestimmt und auch die Absenkung P_1 des Wasserspiegels in der Brunnenanlage festgelegt war, konnte die Berechnung der Ergiebigkeit q der Brunnen nach Gl. (2) erfolgen, indem man zuerst für einen Punkt auf dem Rande eines Brunnens nach dieser Gleichung das Verhältnis zwischen q und p berechnete und dann p gleich der bekannten Größe p_1 setzte.

Nachdem q berechnet war, konnte man für jeden Punkt im Raume die zusätzliche Steighöhe p zufolge der Einwirkung der Brunnenanlage berechnen und nach Addieren von P die endgültige Steighöhe des Grundwassers feststellen. Das Resultat der Berechnung ist durch die auf Abb. 7 eingetragenen Äquipotentiallinien schematisch dargestellt. Man sieht sofort, daß die Äquipotentiallinien den Rand der künftigen Baugrube annähernd auf den richtigen Koten schneiden.

Wenn wir uns nun ferner vorstellen, daß die Baugrube ausgehoben ist, wird dadurch keine Änderung in dem Verlauf der Äquipotentiallinien außerhalb der Baugrube hervorgerufen, und der berechnete Verlauf der Äquipotentiallinien wird deshalb die Verhältnisse

Abb. 7.

Abb. 8.

nach dem Aushub der Baugrube und der Herstellung der Brunnenanlage darstellen, wie es auf Abb. 8 angegeben ist, wo bloß einige kleine Korrektionen durch Aufzeichnung des rektangularen Maschennetzes von Äquipotential- und Stromlinien nach den vorher angegebenen Regeln graphisch vorgenommen worden sind.

Zum Zerfall eines Flüssigkeitsstrahles.

Von *Constantin Weber*, Dresden.

Versuche von A. Haenlein[1]) zeigten verschiedene Zerfallerscheinungen eines aus einer gleichbleibenden Düse austretenden Strahles einer nichtzähen oder zähen Flüssigkeit. Die Zerfallform hing von der Strahlgeschwindigkeit und den physikalischen Eigenschaften der Flüssigkeiten, Oberflächenspannung, Dichte und Zähigkeit ab. Abb. 1 zeigt Aufnahmen der zwei Zerfallformen, des Zertropfens und des Zerwellens, für Wasser (wenig zähe) und für Glyzerin und Rizinusöl (zähe Flüssigkeiten). Abb. 2 gibt schematisch die Lage des Ausschnittes der Aufnahme an.

Abb. 1.

a) Wasser, $d = 3$ mm, $v = 3{,}6$ m/sk, $a = 0$ cm

b) Wasser, $d = 3$ mm, $v = 23$ m/sk, $a = 0$ cm

c) Glyzerin, $d = 1$ mm, $v = 11$ m/sk, $a = 130$ cm

d) Rizinusöl, $d = 0{,}5$ mm, $v = 18$ m/sk, $a = 70$ cm

e) Rizinusöl, $d = 0{,}5$ mm, $v = 82$ m/sk, $a = 14$ cm

Abb. 1. Strahlaufnahmen (verkleinert, a u. b 1:3, c, d u. e 2:3)

Abb. 2. Lage des Ausschnittes der Aufnahme.

Die Versuche veranlaßten mich zur theoretischen Untersuchung des Zerfalles eines Strahles sowohl einer nichtzähen als auch zähen Flüssigkeit. In 1 werden die aus der Oberflächenspannung herrührenden Kräfte abgeleitet, 2 bringt die Ableitung der genauen Gleichungen, 3 die anschaulichere Ableitung einer Näherungsgleichung für das Zertropfen durch rotationssymmetrische Störungen, in 4 wird eingehend das Zertropfen des Strahles einer nichtzähen Flüssigkeit, in 5 des Strahles einer zähen Flüssigkeit untersucht. Infolge der Bewegung des Strahles durch die ruhende Luft wirken Luftkräfte auf die Strahloberfläche, die in 6 für den Strahl mit rotationssymmetrischen Störungen bzw. mit gewellter Mittellinie berechnet werden. In 7 wird dann der Einfluß der Luftkräfte auf das Zertropfen des Strahles einer nichtzähen Flüssigkeit gezeigt. In 8 wird das Zerwellen, das Anwachsen kleiner wellenförmiger Abweichungen der Strahlmittellinie durch die Luftkräfte gebracht.

1. Einfluß der Oberflächenspannung. Untersucht wird ein unendlich langer ruhender Flüssigkeitsstrahl mit kreiszylindrischem Querschnitt ohne Einfluß der Anziehungskraft der Erde. Der Halbmesser des Zylinders ist a, die Oberflächenspannung α (Kraft/Länge). Die Flüssigkeit steht dann unter dem allseitigen im Gleichgewichte befindlichen Druck $\frac{\alpha}{a}$; die Oberfläche besitze geringe Abweichungen δ von der Zylinderform; δ ist eine beliebige Funktion von x und φ, Abb. 3. An jeder Stelle der Oberfläche entsteht dann der Oberflächendruck $\frac{\alpha}{a} + q_\alpha$, worin q die örtliche Abweichung von dem vorherigen gleichseitigen Drucke ist. Es wird

$$\frac{\alpha}{a} + q_\alpha = \alpha\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right).$$

Hierin sind $\frac{1}{R_1}$ und $\frac{1}{R_2}$ die Krümmungen in zwei zueinander senkrechten Ebenen. Die Abweichungen δ und ihre Ableitungen nach x und φ seien so gering, daß bei Berechnung von

[1]) Dr.-Arbeit von A. Haenlein, „Über den Zerfall eines Flüssigkeitsstrahles", wird veröffentlicht in der Zeitschrift „Forschung auf dem Gebiete des Ingenieurwesens" 1931, Heft 4 — Die Arbeit bringt zahlreiche weitere Aufnahmen für Zertropfen, Zerwellen, Übergangsformen und weitere Zerfallformen für sehr hohe Geschwindigkeiten und stellt Gesetzmäßigkeiten hierfür auf. Die Versuche wurden im Maschinenlaboratorium der S.T.H. Dresden ausgeführt. Weitere Versuchsreihen sind z. Zt. in Arbeit.

$\frac{1}{R_1}$ und $\frac{1}{R_2}$ Produktglieder vernachlässigt werden können und daß die Richtung des Oberflächendruckes senkrecht zur ursprünglichen Zylinderoberfläche genommen werden kann. $\frac{1}{R_1}$ und $\frac{1}{R_2}$ werden für einen Querschnitt und einen Längsschnitt bestimmt:

$$\frac{1}{R_1} = \frac{r^2 + 2\left(\frac{\partial r}{\partial \varphi}\right)^2 - r\frac{\partial^2 r}{\partial \varphi^2}}{\left[r^2 + \left(\frac{\partial r}{\partial \varphi}\right)^2\right]^{3/2}}.$$

Mit

$$r = a + \delta; \quad \frac{\partial r}{\partial \varphi} = \frac{\partial \delta}{\partial \varphi} \text{ usw.:}$$

$$\frac{1}{R_1} = \frac{1}{a} - \frac{\delta}{a^2} - \frac{1}{a^2}\frac{\partial^2 \delta}{\partial \varphi^2}.$$

Ebenso

$$\frac{1}{R_1} = -\frac{\partial^2 \delta}{\partial x^2}.$$

Abb. 3. Bezeichnungen im Strahl für beliebige Oberflächenabweichungen.

Folglich

$$q_a = -a\left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{a^2}\frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)\delta \quad \dots\dots\dots\dots\dots\dots \quad (1).$$

Für die weitere Untersuchung dienen die Navier-Stockesschen Gleichungen, in denen die Produktglieder der Geschwindigkeit und ihre Ableitungen als klein höherer Ordnung vernachlässigt werden. Man erhält nur lineare Gleichungen, so daß die Gesamtlösung durch Überlagerung von Einzellösungen gebildet werden kann. Folglich können auch die äußeren Abweichungen durch Überlagerung von Einzelabweichungen gebildet werden. Zerlegt man sie in Fourrier-Reihe nach φ, so ist jedes Glied für sich zu untersuchen. Für den Strahlzerfall sind von Wichtigkeit nur rotationssymmetrische Abweichungen, bei denen δ unabhängig von φ ist, und einseitige Abweichungen, die den cos-Gliedern entsprechen. Bei diesen ändert sich der Kreisquerschnitt nicht, sondern wird nur zur Seite verschoben, wobei die Verschiebung eine Funktion von x ist.

Bei rotationssymmetrischen Abweichungen wird

$$q_a = -a\left(\frac{1}{a^2} + \frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)\delta \quad \dots\dots\dots\dots\dots\dots \quad (1a).$$

zerlegt man die Abweichung in eine Fourrier-Reihe nach x und untersucht das Glied mit der Wellenlänge $l = 2\pi\frac{a}{\zeta}$, worin ζ das Verhältnis des Umfanges des Strahles zur Wellenlänge ist, so wird

$$\delta = \delta^* \cos\frac{2\pi x}{l} = \delta^* \cos\zeta\frac{x}{a}$$

und

$$q_a = -\frac{a\,\delta}{a^2}(1 - \zeta^2).$$

Für $\zeta < 1$ entsprechend $l > 2\pi a$ erhält man für positive δ negative Zusatzdrücke. Die Kräfte infolge der Oberflächenspannung sind bestrebt, die Abweichungen zu vergrößern (instabiler Zustand). Für $\zeta > 1$, $l < 2\pi a$ versuchen die Oberflächenkräfte die Abweichungen zurückzudrücken; für $\zeta = 1$, $l = 2\pi a$ sind die Oberflächenkräfte gleich Null. Man sieht hieraus, daß infolge der Oberflächenspannung allein nur wellenförmige rotationssymmetrische Störungen mit $l > 2\pi a$ den Strahl zum Zerfall bringen.

2. Exakte Lösung bei rotationssymmetrischen Abweichungen. Nach Abb. 4 sind x und r Zylinderkoordinaten, u und v Axial- und Radialgeschwindigkeit. Δ und Δ_1 sind folgende Symbole:

$$\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial r} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial}{\partial r}f\right),$$

$$\Delta_1 f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial r} - \frac{f}{r^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r f)\right).$$

Die Navier-Stockesschen Gleichungen lauten dann:

$$\varrho \frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \eta \Delta u \quad \ldots \quad (2),$$

$$\varrho \frac{\partial v}{\partial t} = -\frac{\partial p}{\partial r} + \eta \Delta_1 v \quad \ldots \quad (3).$$

Die Kontinuitätsgleichung gibt:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{r}\frac{\partial (r v)}{\partial r} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{v}{r} = 0 \quad \ldots \quad (4).$$

Differenziert man (2) und vollführt mit den Gliedern von (3) die Operation

$$\frac{1}{r}\left(\frac{\partial}{\partial r} r\right) = \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r}$$

und addiert die so umformten Gleichungen, so fallen wegen (4) die Glieder mit u und v fort; es bleibt:

$$\Delta p = 0 \quad \ldots \quad (5).$$

Wird Gleichung (3) der Operation Δ_1 unterworfen, so fällt p infolge (4) fort und man erhält die Differentialgleichung für v:

$$\varrho \frac{\partial}{\partial t} \Delta_1 v = \eta \Delta_1^2 v \quad \ldots \quad (6).$$

Abb. 4. Bezeichnungen für rotationssymmetrische Abweichungen zur Ableitung der exakten Gleichungen.

Abb. 5. Zusammenhang zwischen v und δ.

Die Flüssigkeitsteilchen, die beim ungestörten Strahl auf derselben Zylinderoberfläche vom Halbmesser r liegen, bilden infolge der Störungen eine rotationssymmetrische Fläche mit der Meridianlinie $r + \delta$. Hierbei ist δ eine Funktion von x, r und der Zeit t. Nach der Zeit dt erhält man die Meridianlinie

$$r + \delta + \frac{\partial \delta}{\partial t} dt.$$

Ein Flüssigkeitsteilchen hat sich hierbei radial um $v\,dt$, längs um $u\,dt$ bewegt und entspricht also einem anderen x. Man erhält

$$\frac{\partial \delta}{\partial t} dt = v\,dt - \frac{\partial \delta}{\partial x} u\,dt \text{ (Abb. 5).}$$

Bei Vernachlässigung der Produktglieder wird

$$v = \frac{\partial \delta}{\partial t} \quad \ldots \quad (7).$$

In (6) eingesetzt, erhält man die Differentialgleichung für δ:

$$\frac{\partial}{\partial t} \Delta_1 \left(\Delta_1 - \frac{\varrho}{\eta}\frac{\partial}{\partial t}\right) \delta = 0 \quad \ldots \quad (8).$$

Die Reihenfolge der Operationen ist beliebig und die Gleichung zerfällt in

$$\Delta_1 \delta_1 = 0 \quad \ldots \quad (8\,a)$$

und

$$\left(\Delta_1 - \frac{\varrho}{\eta}\frac{\partial}{\partial t}\right) \delta_2 = 0 \quad \ldots \quad (8\,b).$$

Die noch mögliche Lösung $\frac{\partial \delta}{\partial t} = 0$ ist ohne Belang, da sie eine Lage ohne Bewegung gibt. Sind die Lösungen δ_1 von (8a) und δ_2 von (8b) bekannt, so wird die Lösung von (8):

$$\delta = \delta_1 + \delta_2 .$$

Setzt man nach (7)

$$v = \frac{\partial \delta}{\partial t} = \frac{\partial \delta_1}{\partial t} + \frac{\partial \delta_2}{\partial t}$$

in Gl. (3) ein, so läßt sich $\frac{\partial p}{\partial t}$ durch δ_1 und δ_2 ausdrücken:

$$\frac{\partial p}{\partial t} = \eta \frac{\partial}{\partial t}\left[-\frac{\varrho}{\eta}\frac{\partial \delta_1}{\partial t} + \Delta_1 \delta_1 - \frac{\varrho}{\eta}\frac{\partial \delta_2}{\partial t} + \Delta_1 \delta_2 \right].$$

Wegen Gl. (8a) und (8b) fallen in der eckigen Klammer alle Glieder vom zweiten ab fort:

$$p = -\varrho \frac{\partial^2}{\partial t^2} \int \delta_1 \, d r \quad \text{. . . . . (9).}$$

Bei Ausführung der Integration ist auf die Beziehung (5) zu achten: $\Delta p = 0$ bzw. mit (9):

$$\Delta \int \delta_1 \, d r = 0.$$

Die Randbedingungen für $r = a$ sind folgende:

1. Die Verschiebung $\delta = \delta_1 + \delta_2$ ist am Rande gleich der Randverschiebung $\bar{\delta}$.
2. Die Schubspannung τ wird am Rande $\bar{\tau} = 0$.
3. Der Randdruck p steht im Zusammenhange mit der durch $\bar{\delta}$ gegebenen Randbelastung q_a.

Bedingung 1 gibt $(\delta_1 + \delta_2)_{a = r} = \bar{\delta}$ . . . . (10).

Bedingung 2 gibt $\bar{\tau} = \left(\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial v}{\partial x}\right)_{a = r} = 0.$

Diese Gleichung wird nach x differenziert und dann u unter Verwendung der Kontinuitätsgleichung (4) beseitigt. Ersetzt man noch v durch $\frac{\partial \delta}{\partial t}$, so erhält man:

$$\left(\Delta_1 - 2\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)\delta_{r = a} = 0.$$

Setzt man $\delta = \delta_1 + \delta_2$ ein, so erhält man unter Berücksichtigung der Gl. (8a) und (8b):

$$\left[\frac{\varrho}{\eta}\frac{\partial \delta_2}{\partial t} - 2\frac{\partial^2 (\delta_1 + \delta_2)}{\partial x^2}\right]_{r = a} = 0 \quad \text{. . . . . (11).}$$

Bedingung 3 für den Randdruck gibt

$$\left(p + 2\eta \frac{\partial v}{\partial r}\right)_{r = a} = q_a .$$

Mit q nach Gl. (1a), p nach Gl. (9) und v nach Gl. (7):

$$\left[\varrho \frac{\partial^2}{\partial t^2}\int \delta_1 \, d r + 2\eta \frac{\partial^2(\delta_1 + \delta_2)}{\partial t \, \partial r}\right]_{r = a} = \alpha\left(\frac{1}{a^2} + \frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)\bar{\delta} \quad \text{. . . . . (12)}$$

mit der Bedingung für die Integration $\Delta \int \delta_1 d r = 0$.

Gl. (8a) und (8b) sind die Differentialgleichung von δ_1 und δ_2, Gl. (10) bis (12) die Randbedingungen.

Wir wenden uns von der allgemeinen Lösung den Teillösungen zu.

Für δ wird der Ansatz gemacht:

$$\delta = \delta^* e^{\mu t} \cos \zeta \frac{x}{a} \quad \text{. . . . . (13).}$$

Gleiche Ansätze gelten für δ_1, δ_2, $\bar{\delta}$ und p.

Aus solchen Teillösungen läßt sich praktisch jede Gesamtlösung zusammenstellen. δ^* ist nur eine Funktion von r, die für $r=a$ den Wert $\bar{\delta}^*$ annimmt. Die Meridianlinie ist für jede Teillösung eine cos-Linie (Abb. 6) mit der Wellenlänge $l=2\pi\frac{a}{\zeta}$.

Gl. (8a) und (8b) geben:

$$\left(-\frac{\zeta^2}{a^2}+\frac{\partial^2}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}-\frac{1}{r^2}\right)\delta_1^*=0 \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (14\,\mathrm{a}),$$

$$\left(-\frac{\xi^2}{a^2}-\frac{\mu\varrho}{\eta}+\frac{\partial^2}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}-\frac{1}{r^2}\right)\delta_2^*=0 \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (14\,\mathrm{a}).$$

Die Klammerausdrücke der Gleichungen unterscheiden sich nur in ihrem von r unabhängigen Gliede. In Gl. (14a) steht $-\frac{\zeta^2}{a^2}$, in Gl. (14b) $-\frac{\zeta^2}{a^2}-\frac{\mu\varrho}{\eta}$.

Zwecks Übereinstimmung setzen wir $-\frac{\zeta^2}{a^2}-\frac{\mu\varrho}{\eta}=-\frac{\zeta_1^2}{a^2}$

oder

$$\zeta_1^2=\zeta^2+\frac{\mu\varrho a^2}{\eta} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots (15).$$

Abb. 6. Rotationssymmetrische Störung nach der cos-Funktion mit der Wellenlänge $2\pi a/\zeta$.

Die Lösungen sind Besselsche Funktionen erster Ordnung der veränderlichen $\zeta\frac{r}{a}$ bzw. $\zeta_1\frac{r}{a}$, und zwar erster Art, da für $r=0$, $\delta=0$ ist; sie lauten in Reihenentwicklung:

$$\frac{1}{2}\left(\zeta\frac{r}{a}\right)+\frac{1}{2\cdot 2\cdot 4}\left(\zeta\frac{r}{a}\right)^3+\frac{1}{2\cdot 2\cdot 4\cdot 4\cdot 6}\left(\zeta\frac{r}{a}\right)^5+\cdots=F_1\left(\zeta\frac{r}{a}\right)$$

bzw.

$$\frac{1}{2}\left(\zeta_1\frac{r}{a}\right)+\frac{1}{2\cdot 2\cdot 4}\left(\zeta_1\frac{r}{a}\right)^3+\frac{1}{2\cdot 2\cdot 4\cdot 4\cdot 6}\left(\zeta_1\frac{r}{a}\right)^5+\cdots=F_1\left(\zeta_1\frac{r}{a}\right).$$

In der Schreibweise der Bessel-Funktionen:

$$F_1\left(\zeta\frac{r}{a}\right)=-i\,J_1\left(i\,\zeta\frac{r}{a}\right).$$

Um δ_1 und δ_2 zu erhalten, können diese Funktionen noch mit einer von r unabhängigen Größe multipliziert werden. Diese sind gleich so bestimmt, daß Gl. (10) $(\delta_1+\delta_2)_{r=a}=\bar{\delta}$ erfüllt ist:

$$\delta_1^*=(1-c)\,\bar{\delta}^*\,F_1\left(\zeta\frac{r}{a}\right)\Big/F_1(\zeta) \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (16\,\mathrm{a}),$$

$$\delta_2^*=c\,\bar{\delta}^*\,F_1\left(\zeta_1\frac{r}{a}\right)\Big/F_1(\zeta_1) \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (16\,\mathrm{b}).$$

Zur Bestimmung von c wird in Gl. (11) $\delta_1=\delta_1^*e^{\mu t}\cos\zeta\frac{x}{a}$ und entsprechend δ_2 eingesetzt. Die Funktionen F_1 heben sich fort, da $r=a$ ist. Weiter wird die Gleichung durch $\bar{\delta}^*e^{\mu t}\cos\zeta\frac{r}{a}$ gekürzt.

$$\mu\frac{\varrho}{\eta}c+2\frac{\zeta^2}{a^2}=0.$$

Hieraus

$$c = -\frac{2\zeta^2\eta}{\mu\varrho a^2} \quad \ldots \ldots (17).$$

Die Lösungen δ_1^* und δ_2^* mit diesem Werte c müssen die letzte Randgl. (12) erfüllen. In dieser wird:

$$\int \delta_1\, d\,r = \frac{(1-c)\,\bar{\delta}^*\,a}{\zeta\, F_1(\zeta)}\, e^{\mu t} \cos\zeta\frac{x}{a} \cdot \int F_1\left(\zeta\frac{r}{a}\right) d\left(\zeta\frac{r}{a}\right).$$

Das Integral gibt die Besselsche Funktion nullter Ordnung

$$\int F_1\left(\zeta\frac{r}{a}\right) d\left(\zeta\frac{r}{a}\right) = 1 + \frac{1}{2\cdot 2}\left(\zeta\frac{r}{a}\right)^2 + \frac{1}{2\cdot 2\cdot 4\cdot 4}\left(\zeta\frac{r}{a}\right)^4 + \cdots = F_0\left(\zeta\frac{r}{a}\right) \quad \ldots \ldots (18).$$

Damit ist die Integrationsbedingung $\Delta\int\delta_1\, d\,r = 0$ erfüllt. Mit dieser Lösung des Integrals gibt Gl. (12), wenn $F_1'(\zeta) = \frac{d\,F_1(\zeta)}{d\,\zeta}$ bedeutet:

$$\varrho\,\mu^2\left(1 + \frac{2\zeta^2\eta}{\mu\varrho a^2}\right)\frac{a\,F_0(\zeta)}{\zeta\,F_1(\zeta)} +$$

$$2\eta\mu\left[\left(1 + \frac{2\zeta^2\eta}{\mu\varrho a^2}\right)\frac{\zeta\,F_1'(\zeta)}{a\,F_1(\zeta)} - \frac{2\zeta^2\eta}{\mu\varrho a^2}\,\frac{\zeta_1 F_1'(\zeta_1)}{a\,F_1(\zeta_1)}\right] = \frac{a}{a^2}(1-\zeta^2) \quad \ldots \ldots (19).$$

Nach Umformung unter Verwendung der Beziehungen

$$F_1'(\zeta) = F_0(\zeta) - \zeta^1 F_1(\zeta)$$

und

$$\frac{\eta}{\mu\varrho a^2} = \frac{1}{\zeta_1^2 - \zeta^2}:$$

$$\mu^2\frac{F_0(\zeta)}{2\zeta^{-1}F_1(\zeta)} + \mu\frac{\eta\zeta^2}{\varrho a^2}\left[2\frac{F_0(\zeta)}{\zeta_1 F_1(\zeta)} - 1 + \frac{2\zeta^2}{(\zeta_1^2-\zeta^2)}\left(\frac{F_0(\zeta)}{\zeta^{-1}F_1(\zeta)} - \frac{F_0(\zeta_1)}{\zeta_1^{-1}F_1(\zeta_1)}\right)\right] = \frac{a}{2\varrho a^3}(1-\zeta^2)\,\zeta^2 \quad (20)^1).$$

Hiermit ist die Gleichung für μ bei gegebenem ζ aufgestellt.

Der Koeffizient von μ^2 ist:

$$\frac{F_0(\zeta)}{2\zeta^{-1}F_1(\zeta)} = \frac{1 + \frac{\zeta^2}{4} + \frac{\zeta^4}{64} + \frac{\zeta^6}{2304} + \frac{\zeta^8}{147456} + \ldots}{1 + \frac{\zeta^2}{8} + \frac{\zeta^4}{192} + \frac{\zeta^6}{9216} + \frac{\zeta^8}{737280} + \ldots}$$

$$= 1 + \frac{\zeta^2}{8} - \frac{\zeta^4}{192} + \frac{\zeta^6}{3072} - \frac{\zeta^8}{46080} + \ldots$$

und unterscheidet sich für $\zeta < 1$ nur wenig vom Werte 1.

Die eckige Klammer enthält dieselben Ausdrücke und gibt die Reihenentwicklung:

$$4\left(1 + \frac{\zeta^2}{8} - \frac{\zeta^4}{192} + \frac{\zeta^6}{3072} - \frac{\zeta^8}{46080} + \ldots\right) - 1 +$$

$$\frac{4\zeta^2}{\zeta_1^2 - \zeta^2}\left(-\frac{\zeta_1^2-\zeta^2}{8} + \frac{\zeta_1^4-\zeta^4}{192} - \frac{\zeta_1^6-\zeta^6}{3072} + \frac{\zeta_1^8-\zeta^8}{46080} - \ldots\right) =$$

$$3 + \frac{1}{48}\zeta^2\zeta_1^2 - \frac{1}{768}\zeta^2\zeta_1^2(\zeta^2+\zeta_1^2) + \frac{1}{11\,520}\zeta^2\zeta_1^2(\zeta^4 + \zeta^2\zeta_1^2 + \zeta_1^4)\ldots.$$

Auch diese Reihe unterscheidet sich für $\zeta < 1$ kaum vom Werte 3. An Stelle von Gl. (20) kann mit großer Genauigkeit die in μ quadratische Gleichung genommen werden:

$$\mu^2 + \mu\frac{3\eta}{\varrho a^2}\zeta^2 = \frac{a}{2\varrho a^3}(1-\zeta^2)\zeta^2 \quad \ldots \ldots (21).$$

Hat man μ daraus bestimmt, so können in Gl. (20) die Koeffizienten von μ^2 und μ verbessert werden und man erhält eine neue quadratische Gleichung, die aber fast dieselben μ-Lösungen gibt.

[1]) Ohne Berücksichtigung der Zähigkeit ist die entsprechende Gleichung aufgestellt von Lord Rayleigh, Proc. London math. Soc. 1878.

In 3 wird die Näherungsgleichung (21) auf anschaulichere Weise unmittelbar abgeleitet, wobei sich auch die physikalische Bedeutung der Näherung ergibt.

Ist die rechte Seite der Gl. (21) gleich Null, also $\zeta = 1$ oder $\zeta = 0$, so ist ein Wert $\mu = 0$, der andere Wert negativ. Für $0 < \zeta < 1$ ist die rechte Seite positiv, und ein μ-Wert wird positiv, der andere negativ. Nur diese positiven Werte von μ sind von Belang. Den negativen μ-Werten entsprechend abnehmende, den imaginären μ-Werten oszillierende, den komplexen μ-Werten mit negativem Realteil abnehmende oszillierende Störungen.

3. Elementare Ableitung der Näherungslösung bei rotationssymmetrischen Störungen. In Frage kommen nur langwellige Störungen, Abb. 7. Die Geschwindigkeit v ist gering, u und p sind praktisch nur Funktionen von x. Die Aufgabe kann eindimensional behandelt werden.

Dem Außendrucke $q = -\alpha\left(\frac{1}{a^2} + \frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)\delta$ entspricht in jedem Querschnitte ein einheitlicher Innendruck p und ein einheitlicher Druck p_x in x-Richtung. Wir betrachten einen scheibenförmigen Teil des Strahles von der Länge dx. Der Halbmesser ist $a + \delta$. Nach der Zeit dt hat sich dieser Teil um $u\,dt$ nach rechts verschoben. Der neue Halbmesser wird:

$$a + \delta + \frac{\partial \delta}{\partial t} dt + \frac{\partial \delta}{\partial x} u\, dt.$$

Abb. 7. Bezeichnungen für rotationssymmetrische Abweichungen zur Ableitung der Näherungsgleichungen.

Abb. 8 a bis c. Zerlegung des Spannungszustandes.

Das letzte Glied ist klein von höherer Ordnung und kann fortgelassen werden. Bei Bestimmung der zeitlichen Änderung genügt es, die Änderung für unveränderliches x zu berücksichtigen, während die Änderung infolge der Axialbewegung des Teiles belanglos ist. Dieses gilt auch für die zeitliche Änderung von p, p_x und u.

Der Mittelwert der Drücke in x-, y- und z-Richtung p_x, q, q gibt den Innendruck

$$p = \frac{1}{3}(p_x + 2\,q_a).$$

Einfluß der Zähigkeit. Der Zusammenhang zwischen den inneren Spannungen $\sigma_x = -p_x$, $\sigma_y = \sigma_z = -q_a$ und τ_{xy} mit den Geschwindigkeiten folgt aus der Gleichartigkeit mit dem elastischen Problem. Die Poisson-Zahl wird $\nu = 0{,}5$; an Stelle des Gleitmoduls G tritt η, an Stelle des Elastizitätsmoduls $E = 2\,G\,(1 + \nu)$ tritt $3\,\eta$. An Stelle der Verschiebungen sind u und v zu nehmen.

Betrachtet man den zylindrischen Teil des Strahles für konstantes x, so wird derselbe durch die Drücke verkürzt und im Durchmesser vergrößert.

Für die Schubspannungen gilt:

$$\tau_{xy} = \eta\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right);$$

u ist unabhängig von y, v ist an und für sich klein und ändert sich infolge der langen Wellen nur wenig mit x. Infolgedessen wird τ_{xy} bedeutungslos, was mit der einen Randbedingung übereinstimmt.

Von den Normalspannungen wirkt auf die Gestalt des Körperteilchens nur $p_x - p$ in x-Richtung, $q_a - p = -\frac{1}{2}(p_x - p)$ in y- und z-Richtung, Abb. 8a. Der mittlere Druck p

bleibt bei nicht zusammendrückbarem Stoffe ohne Einfluß. Zerlegt man die Beanspruchung nach Abb. 8b und 8c, so wird für den Spannungszustand nach 8b:

$$\frac{\partial u_1}{\partial x} = -\frac{\partial v}{\partial y}; \quad E\frac{\partial u_1}{\partial x} = \sigma_x - \nu\,\sigma_y \text{ (für das elastische Problem)}$$

$$3\eta\frac{\partial u_1}{\partial x} = -\frac{1}{2}(p_x - p) - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}(p_x - p)$$

oder

$$4\eta\frac{\partial u_1}{\partial x} = p - p_x.$$

Dasselbe gilt für den Spannungszustand nach Abb. 8c mit der Geschwindigkeit u_2.

Zusammen erhält man mit $u = u_1 + u_2 = 2\,u_1$ und $p = \frac{1}{3}(p_x + 2\,q_a)$: $q_a - p_x = 3\eta\frac{\partial u}{\partial x}$ und mit dem Werte von q_a:

$$p_x = -\alpha\left(\frac{1}{a^2} + \frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)\delta - 3\eta\frac{\partial u}{\partial x} \quad \ldots\ldots \quad (22).$$

Kontinuitätsgleichung. Die Scheibe vom Durchmesser $a + \delta$ und von der Länge dx hat den Rauminhalt $\pi(a+\delta)^2\,dx$; dieser ändert sich in der Zeit dt, da die Stirnflächen die Geschwindigkeit u und $u + \frac{\partial u}{\partial x}dx$ haben, um:

$$\frac{\partial V}{\partial t}dt = \frac{\partial}{\partial t}\pi(a+\delta)^2\,dt\,dx + \pi(a+\delta)^2\frac{\partial u}{\partial x}dx\,dt.$$

Da die Flüssigkeit nicht zusammendrückbar ist, so ist $\frac{\partial V}{\partial t} = 0$ und es folgt bei Vernachlässigung höherer Glieder:

$$\frac{2}{a}\frac{\partial\delta}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad \ldots\ldots \quad (23).$$

Bewegungsgleichung. Die Drücke p_x und $p_x + \frac{\partial p_x}{\partial x}dx$ auf die Stirnseiten der Zylinderscheibe beschleunigen dieselbe in x-Richtung:

$$-\frac{\partial}{\partial x}[\pi(a+\delta)^2 p_x]\,dx = \pi(a+\delta)^2\,dx\,\varrho\frac{\partial u}{\partial t}$$

oder

$$-\frac{\partial p_x}{\partial x} = \varrho\frac{\partial u}{\partial t} \quad \ldots\ldots \quad (24).$$

Differentialgleichung für δ. Setzt man p_x nach (22) und u nach (23) in Gl. (24) ein, so erhält man:

$$\frac{\partial^2\delta}{\partial t^2} - \frac{3\eta}{\varrho}\frac{\partial^3\delta}{\partial t\,\partial x^2} = -\frac{\alpha}{2\varrho a}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\delta + a^2\frac{\partial^2\delta}{\partial x^2}\right).$$

Mit dem früheren Ansatze $\delta = \delta^* e^{\mu t}\cos\zeta\frac{x}{a}$ erhält man wieder:

$$\mu^2 + \mu\frac{3\eta}{\varrho a^2}\zeta^2 = \frac{\alpha}{2\varrho a^3}(1-\zeta^2)\zeta^2 \quad \ldots\ldots \quad (21).$$

4. Zertropfen einer nichtzähen Flüssigkeit. Die Abweichung der Oberfläche δ besteht aus einer Überlagerung verschiedener cos- (bzw. sin-) Funktionen. Die Gleichung für den Koeffizienten von t in der Exponentialfunktion wird exakt:

$$\mu^2 = \frac{\alpha}{2\varrho a^3}(1-\zeta^2)\zeta^2\frac{2\zeta^{-1}F_1(\zeta)}{F_0(\zeta)} \quad \ldots\ldots \quad (26)$$

angenähert:

$$\mu^2 = \frac{\alpha}{2\varrho a^3}(1-\zeta^2)\zeta^2 \quad \ldots\ldots \quad (27).$$

Abb. 9 zeigt die Abhängigkeit der Größe $\mu \Big/ \sqrt{\frac{a}{2\varrho a^3}}$ nach beiden Gleichungen. Der Unterschied ist nur geringfügig. Für ein bestimmtes $\zeta = \zeta_{\text{opt}}$ erhält man für μ den Größtwert μ_{opt}. Für die Näherungslösung ist

$$\zeta_{\text{opt}} = \sqrt{0,5} \quad \text{und} \quad \mu_{\text{opt}} = \sqrt{\frac{a}{8\varrho a^3}} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (28).$$

Für die exakte Lösung wird ζ_{opt} kaum merkbar größer und μ_{opt} 3 vH kleiner. Der Unterschied ist so gering, daß weiter mit der Näherungslösung gerechnet wird.

Abb. 9. Abhängigkeit der Größe $\mu \Big/ \sqrt{\frac{a}{2\varrho a^3}}$ von ζ exakt und angenähert für nichtzähe Flüssigkeiten.

Sind für $t = 0$ und für alle ζ-Werte die Anfangsstörungen gleichstark, so werden die Wellenlängen, die ζ_{opt} und nahen Werten entsprechen, stärker anwachsen und nach längerer Zeit nur noch bemerkbar sein. Das Verhältnis der zu beobachtenden Wellenlänge zum Strahldurchmesser wird, da $\zeta = \frac{2\pi a}{l}$ ist:

$$l_{\text{opt}}/2a = \pi/\zeta_{\text{opt}} = \pi\sqrt{2} = 4,44\,.$$

Außer dem positiven μ erhält man für jedes ζ einen gleichgroßen negativen Wert; die entsprechende Störung verschwindet allmählich. Durch Überlagerung erhält man die Störungen $\delta^* \operatorname{Cof} \mu t \cos \zeta \frac{x}{a}$ und $\delta^* \operatorname{Sin} \mu t \cos \zeta \frac{x}{a}$; für $t = 0$ geben diese eine Anfangsstörung ohne Radialgeschwindigkeit, bzw. ohne Radialabweichung. Im weiteren werden nur die Störungen mit positivem μ berücksichtigt.

Tritt der Strahl aus einer Düse mit der Geschwindigkeit U_S, so erhält er an der Düse Anfangsstörungen, die mit dem Strahle vorwärtsgetragen werden und gleichzeitig anwachsen, Abb. 10.

Das Koordinatensystem sei mit dem Strahle verbunden und bewege sich mit der Geschwindigkeit U_S nach rechts. Für die Düse $x = -U_S t$.

Die Anfangsstörung an der Düse sei eine cos-Funktion der Zeit; wenn die Störung sich im Strahle zeitlich nicht ändern würde, so wäre

$$\delta = \delta^* \cos \zeta \frac{x}{a}\,.$$

Da ein zeitliches Anwachsen erfolgt, so wird näherungsweise:

$$\delta = \delta^* e^{\mu(t + x/U_S)} \cdot \cos \zeta \frac{x}{a} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (30).$$

Für die Düse, also $x = -U_S t$, wird $\delta_{\text{Düse}} = \delta^* \cdot \cos \frac{U_S t}{a}$.

Abb. 10. Strahl aus der Düse mit rotationssymmetrischer Störung.

Die Lösung stellt nur eine Näherung dar, die für genügend große U_S gilt. Um die Genauigkeit zu prüfen, vergleichen wir diese Näherung mit einer genauen Lösung der Diff.-Gl. (25). Für nichtzähe Flüssigkeiten lautet diese:

$$\frac{\partial^2 \delta}{\partial t^2} = -\frac{a}{2\varrho a}\left(\frac{\partial^2 \delta}{\partial x^2} + a^2 \frac{\partial^4 \delta}{\partial x^4}\right) \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (31).$$

Wir setzen

$$\delta = \delta^* e^{\mu_S (t + x/U_S)} \cdot \cos \zeta \frac{x - U_1 t}{a} = \delta^* \Re\, e^{\left(\frac{\mu_S}{U_S} + i\frac{\zeta}{a}\right)x + \left(\mu_S - i\zeta\frac{U_1}{a}\right)t} \ldots \quad (32).$$

Zu einer bestimmten Zeit stellt die Störung wie vorher eine angefachte cos-Linie dar. Für ein bestimmtes ζ der cos-Linie wird für die Strahlgeschwindigkeit U_S der wirkliche Wert μ_s gesucht. Die cos-Linie kann sich gleichzeitig langsam mit der Geschwindigkeit U_1 relativ zum Strahle bewegen.

Wir nehmen ζ/a und $\frac{\mu_s}{U_s} = \frac{\mu}{U}$ als gegeben an, nehmen also μ nach Gl. (27) und eine Geschwindigkeit U und bestimmen erst später U_S, das sich von U ebensowenig unterscheiden wird wie μ_s von μ. Gehen wir mit dem Ansatze in Gl. (31), so erhalten wir zur Bestimmung von μ_s und $\zeta \frac{U_1}{a} = \nu_s$ die zwei Gleichungen:

$$\mu_s^2 - \nu_s^2 = \frac{a}{2\varrho a^3}\left[\zeta^2 - \left(\frac{\mu}{U} a\right)^2 - \zeta^4 + 6\zeta^2\left(\frac{\mu}{U} a\right)^2 - \left(\frac{\mu}{U} a\right)^4\right]$$

$$\mu_s \nu_s = \frac{-a}{2\varrho a^3}\left[\zeta\left(\frac{\mu}{U} a\right) + 2\left(-\zeta^3\left(\frac{\mu}{U} a\right) + \zeta\left(\frac{\mu}{U} a\right)^3\right)\right].$$

Setzt man

$$\sqrt{\frac{a}{\varrho a}} : U = \varepsilon,$$

so wird mit

$$\mu = \sqrt{\frac{a}{2\varrho a^3}} \sqrt{\zeta^2 (1 - \zeta^2)} :$$

$$\left.\begin{aligned} \mu_s^2 - \nu_s^2 &= \mu^2\left[1 + \frac{1}{2}(6\zeta^2 - 1)\varepsilon^2 + \zeta^2(\zeta^2 - 1)\varepsilon^4\right], \\ \mu_s \nu_s &= \frac{-\mu^2}{\sqrt{2(1-\zeta^2)}}\left[(1 - 2\zeta^2)\varepsilon + \zeta^2(1-\zeta^2)\varepsilon^3\right] \end{aligned}\right\} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (33).$$

Ist $\varepsilon < 1$, so wird auch ν_s klein im Vergleich zu μ_s und $\mu \approx \mu$.

Die Bedingung für die Zulässigkeit der Lösung (30) ist folglich, da dann auch $U \approx U_S$ wird:

$$U_S > \sqrt{\frac{a}{\varrho a}}.$$

Zahlenbeispiel: Wasserstrahl, Düsendurchmesser 0,5 mm, $a = 0{,}025$ cm, $\varrho = 0{,}00102$ gcm^{-3}s^2, $\alpha = 0{,}072$ gcm^{-1}. Für $\zeta = 0{,}8$ ist $\mu = 728$ s^{-1}; $\sqrt{\frac{a}{\varrho a}} = 53$ cms^{-1}.

Für $U = 200$ cms^{-1} wird $\varepsilon = 0{,}265$.

Die Gl. (33) geben

$$\mu_s^2 - \nu_s^2 = 1{,}11\,\mu^2,$$

$$\mu_s \nu_s = -0{,}0130\,\mu^2,$$

$$\mu_s = 1{,}05\,\mu;\quad \nu_s = -0{,}0125\,\mu = -9{,}8\ \mathrm{s}^{-1};\quad U_1 = \frac{\nu_s a}{\zeta} = -0{,}3\ \mathrm{cms}^{-1}.$$

μ_s ist unwesentlich größer als μ, die Geschwindigkeit der cos-Linie relativ zum Strahl ist im Vergleich zur Strahlgeschwindigkeit unbedeutend.

Im weiteren wird vorausgesetzt, daß U_S so groß ist, daß Gl. (30) für den Düsenstrahl gilt.

Zerfallzeit und Zerfallänge. Der Strahl aus der Düse zeigt kurz nach der Düse keine sichtbaren Störungen, erst nach einer längeren Strecke tritt die Wellung ein, die Einschnürungen wachsen und bringen den Strahl zum Zertropfen. Die Länge von der Düse bis zur Zertropfstelle ist die Zertropflänge L, ihr entspricht die Zertropfzeit $T = \frac{L}{U_S}$.

Ausschlaggebend für den Zerfall sind die Wellenlängen, die ζ_{opt} oder nur wenig davon abweichenden ζ-Werten entsprechen. Wir ersetzen die ganzen Störungen an der Düse durch eine gleichwertige Störung $\delta^* \cos \zeta_{\mathrm{opt}} \frac{U_S t}{a}$ und verlangen, daß die beobachtete Zerfallänge eintritt. Es kann angenommen werden, daß das Exponentialgesetz bis zur Zertropfstelle gültig ist, da das Stück des Strahles, in dem die Abweichungen δ keine kleinen Größen sind, nur kurz ist.

Man erhält:

$$\bar{d}^* e^{\mu_{\text{opt}} T} = a$$

oder

$$T = \frac{1}{\mu_{\text{opt}}} \ln \frac{a}{\bar{\delta}^*}; \qquad L = T\, U_S .$$

Aus Versuchen mit Wasser ergab sich bei der von A. Haenlein untersuchten Düse der Mittelwert:

$$T\mu_{\text{opt}\,T} = 12.$$

Hieraus folgt:

$$\bar{\delta}^* = a/e^{12} = a/160000.$$

Die Störungen sind bei dieser Größenordnung in der Nähe der Düse nicht zu bemerken. Die Anfangsstörungen an der Düse sind selbstverständlich nicht ununterbrochen gleich, sondern unterliegen starken Schwankungen. Trotzdem wird die Zerfallzeit und damit bei einer gleichbleibenden Strahlgeschwindigkeit U_S die Zerfallänge fast unverändert bleiben. Verkleinert sich z. B. $\bar{\delta}^*$ um das 20fache, so verringern sich T und L nur um 25 vH.

Abb. 11. Änderung der Zerfallänge mit U_S, falls die Anfangsstörung mit $U_S{}^2$ wächst und für $U_S = 2$ m/sk $\ln(a/\bar{\delta}^*) = 12$ ist.

Abb. 12. Zerfall durch singuläre Störungen. a: Störungen im Abstande l_{opt}, a bis e: Störungen im Abstande 10 l_{opt} mit $\mu_{\text{opt}}\, T = 3$, $= 6$, $= 9$ und $= 12$. Die singulären Anfangsstörungen sind so bestimmt, daß eine vollkommene Einschnürung eintritt.

Aus den streuenden Versuchsergebnissen zeigte sich, daß bis zu einer gewissen Geschwindigkeit die Zerfallänge L proportional U_S ist. Hieraus könnte man folgern, daß der Mittelwert der Anfangsstörungen unabhängig von U_S sei. Infolge der festgestellten Unempfindlichkeit der Länge L gegen Änderungen von $\bar{\delta}^*$ kann auch eine andere Gesetzmäßigkeit bestehen. Abb. 11 zeigt die Abhängigkeit der Länge L von U, wenn sich $\bar{\delta}^*$ mit $U_S{}^2$ ändert und für 2 ms^{-1} $\ln(a:\bar{\delta}^*) = 12$ ist. Bei der Streuung der Versuchsergebnisse läßt sich eine Entscheidung nicht treffen.

Es sei noch gezeigt, wie einzelne Unstetigkeiten im unendlichen Strahle anwachsen und sich ausbreiten. Es seien zum Vergleiche zwei Fälle untersucht: Die singuläre Einschnürung trete periodisch auf einmal im Abstande l_{opt}, dann im Abstande $10 \cdot l_{\text{opt}}$.

Im ersten Falle genügt für $t = 0$ der Ansatz:

$$\bar{\delta}_1 = \bar{\delta}_1{}^* \left(\frac{1}{2} + \underline{\cos \frac{x}{\sqrt{2}\, a}} + \cos \frac{2x}{\sqrt{2}\, a} + \cos \frac{3x}{\sqrt{2}\, a} + \ldots \right).$$

Nur die erste unterstrichene cos-Störung wird anwachsen; Abb. 12a zeigt die Form, wenn das Anwachsen der Störung nach dem Exponentialgesetze bis zur Abschnürung erfolgt. Hierbei ist $T\mu_{\text{opt}} = \ln(a:\bar{\delta}^*)$. Je nach der Größe von $\ln(a:\bar{\delta}^*)$ erhält man verschiedene Zeiten, bis dieser Zustand erreicht ist.

Befinden sich die Störungen im Abstande $10 \cdot l_{\text{opt}}$, so wird

$$\bar{\delta}_{10} = \bar{\delta}_{10}{}^* \left(\frac{1}{2} + \underline{\cos \frac{x}{10\sqrt{2}\, a} + \cos \frac{2x}{10\sqrt{2}\, a} + \ldots \cos \frac{14x}{10\sqrt{2}\, a}} + \cos \frac{15x}{10\sqrt{2}\, a} + \ldots \right).$$

Für genügend große Zeiten sind nur die unterstrichenen Glieder zu berücksichtigen. Zur Zeit T wird mit $\zeta_n = \frac{n}{10\sqrt{2}}$

$$\bar{\delta}_{10,\,t=T} = \bar{\delta}_{10}^* \sum_{n=1}^{n=14} \cos \frac{n\,x}{10\sqrt{2}\,a} \cdot e^{2\sqrt{\zeta_n^2 (1-\zeta_n^2)} \cdot \mu_{opt} T}.$$

In Abb. 12b—e sind die Zerfallerscheinungen aufgezeichnet für $\mu_{opt}\,T = 3, = 6, = 9$ und $= 12$. Hierbei ist $\bar{\delta}_{10}$ so bestimmt, daß eine vollkommene Einschnürung eintritt, daß also

$$\bar{\delta}_{10,\,t=T} = \bar{\delta}_{10}^* \sum e^{2\sqrt{\zeta_n^2(1-\zeta_n^2)} \cdot \mu_{opt} T} = a \text{ wird.}$$

Die Größe der Singularität ist

im ersten Falle

$$S_1 = \int_{-0}^{+0} \bar{\delta}_{1,\,t=0}\, d\,x = \frac{1}{2}\, \bar{\delta}_1^* \cdot l_{opt},$$

im zweiten Falle

$$S_{10} = \int_{-0}^{+0} \bar{\delta}_{10,\,t=0}\, d\,x = \frac{1}{2}\, \bar{\delta}_{10}^* \cdot 10\, l_{opt}.$$

(Integrationsgrenzen dicht vor und hinter der singulären Stelle.)

Zahlentafel 1.

Zahlenwerte zum Strahlzerfall durch singuläre Störungen.

$\mu_{opt} \cdot T$	$\bar{\delta}_1^* : a$	$\bar{\delta}_{10}^* : a$	$S_1 : \frac{1}{2}\, a\, l_{opt}$	$S_{10} : \frac{1}{2}\, a\, l_{opt}$	$\frac{S_1}{S_{10}}$
3	1 : 20,1	1 : 143	1 : 20,1	1 : 14,3	0,71
6	1 : 403	1 : 2060	1 : 403	1 : 206	0,51
9	1 : 8100	1 : 33850	1 : 8100	1 : 3385	0,42
12	1 : 162700	1 : 588920	1 : 162700	1 : 58892	0,34

In Zahlentafel 1 sind für die obigen vier Werte von $\mu_{opt}\,T$ die Werte

$$\bar{\delta}_1^* : a, \quad \bar{\delta}_{10}^* : a, \quad S_1 : \left(\frac{1}{2}\, a\, \bar{\delta}_1^*\right), \quad S_{10} : \left(\frac{1}{2}\, a\, \bar{\delta}_{10}^*\right)$$

und S_1/S_{10} angegeben. Die letzten Werte zeigen, wie sich die Größe der Singularitäten bei diesen zwei Entfernungen verhalten müßten, damit in der gleichen Zeit der Zerfall erfolgt. Für $\mu_{opt}\,T \to \infty$ geht $S_1/S_{10} \to 0{,}1$. Eine vereinzelt auftretende starke singuläre Störung an der Düse führt einen plötzlichen früheren Zerfall hervor, wobei die Zerfallstelle mit der Strahlgeschwindigkeit sich vorbeibewegt und die Störung sich seitlich ausbreitet[1]).

5. Zertropfen einer zähen Flüssigkeit. Die Untersuchung wird für die Näherungsgleichung (21) durchgeführt, da der Unterschied der μ-Werte noch geringer als bei der nichtzähen Flüssigkeit wird.

Für den unendlichen Strahl gilt für eine Teillösung

$$\bar{\delta} = e\, \bar{\delta}^{*\,\mu\, t} \cos \zeta\, \frac{x}{a}$$

mit

$$\mu = -\frac{3}{2}\,\frac{\eta}{\varrho\, a^2}\,\zeta^2 \pm \sqrt{\frac{a}{2\,\varrho\, a^3}\,(1-\zeta^2)\,\zeta^2 + \left(\frac{3}{2}\,\frac{\eta}{\varrho\, a^2}\,\zeta^2\right)^2} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (35).$$

Abb. 13 zeigt $\mu \Big/ \sqrt{\frac{a}{2\,\varrho\, a^3}}$ in Abhängigkeit von ζ für $\frac{3}{2}\,\frac{\eta}{\varrho\, a^2} : \sqrt{\frac{a}{2\,\varrho\, a^3}} = 0, = 1$ und $= 20$. (Den Werten 1 und 20 entsprechen Glyzerin, $2\,a = 0{,}07$ mm und Rizinus, $2\,a = 0{,}07$ mm.)

[1]) Eine solche Stelle zeigt Abb. 10b der Arbeit von A. Haenlein.

Für ζ_{opt} tritt der Größtwert μ_{opt} ein.

Man erhält

$$\mu_{\text{opt}} = 1 : \left(\sqrt{\frac{8\varrho}{\alpha}} \cdot a^{1,5} + \frac{6\eta}{\alpha} \cdot a\right) \quad \ldots \quad (36),$$

$$\zeta_{\text{opt}} = 1 : \sqrt{2\left(1 + \sqrt{\frac{9}{2}\frac{\eta^2}{\alpha\varrho a}}\right)} \quad \ldots \quad (37)$$

und

$$l_{\text{opt}} = 2\pi a \sqrt{2\left(1 + \sqrt{\frac{9}{2}\frac{\eta^2}{\alpha\varrho a}}\right)} \quad \ldots \quad (38).$$

Nimmt man näherungsweise an, daß an der Düse für jede Flüssigkeit nur Störungen mit dem jeweiligen ζ_{opt} von gleicher Stärke (also mit gleichem δ^*) auftreten, so geben die Werte μ_{opt} die Möglichkeit, das Gesetz für die Zerfallzeit T aufzustellen. Wie in 4 wird

$$T = \frac{1}{\mu_{\text{opt}}} \ln \frac{a}{\delta^*}$$

und mit $\ln (a : \delta^*) = \text{const}$:

$$T = \ln \frac{a}{\delta^*} \cdot \left(\sqrt{\frac{8\varrho}{\alpha}}\, a^{1,5} + \frac{6\eta}{\alpha}\, a\right)$$

Abb. 13. Abhängigkeit der Größe $\mu \Big/ \sqrt{\frac{\alpha}{2\varrho a^3}}$ von ζ für nichtzähe und zähe Flüssigkeiten. $\frac{3\eta}{2\varrho a^2} : \sqrt{\frac{\alpha}{2\varrho a^3}} = 0$ (Kurve I, nichtzähe Flüssigkeit), $= 1$ (Kurve II), $= 20$ (Kurve III).

Abb. 14. Funktion $T\frac{\alpha^2\varrho}{27\eta^3} = \ln\frac{a}{\delta^*}\left[\left(\frac{2}{9}\frac{\alpha\varrho a}{\eta^2}\right)^{3/2} + \left(\frac{2}{9}\frac{\alpha\varrho a}{\eta^2}\right)\right]$ und Versuchsergebnisse.

oder dimensionslos:

$$T \cdot \frac{\alpha^2\varrho}{27\eta^3} = \ln\frac{a}{\delta^*} \cdot \left[\left(\frac{2}{9}\frac{\alpha\varrho a}{\eta^2}\right)^{3/2} + \left(\frac{2}{9}\frac{\alpha\varrho a}{\eta^2}\right)\right].$$

In Abb. 14 ist in log. Maßstäben $T \cdot \frac{\varrho\alpha^2}{27\eta^3}$ als Funktion von $\frac{2}{9}\frac{\alpha\varrho a}{\eta^2}$ dargestellt. Hier ist $\ln\frac{a}{\delta^*} = 12$ angenommen. Die Versuchsergebnisse von A. Haenlein sind zum Vergleiche eingetragen. Für eine wenig zähe Flüssigkeit überwiegt das erste Glied, und T ist proportional $a^{1,5}$, für sehr zähe Flüssigkeiten das zweite Glied, und T ist proportional a.

6. Oberflächenbelastung durch den Lufteinfluß. Durch die ruhende Luft bewege sich mit der Geschwindigkeit U_S ein im wesentlichen zylindrischer fester Körper vom Halbmesser a mit der geringen Oberflächenabweichung δ, Abb. 15. Das Koordinatensystem x, y, z bzw. x, r, φ ist mit der Luft verbunden. Die Luftteilchen erhalten geringe Geschwindigkeiten u, v, w. Die im Mittel in der Entfernung r befindlichen Luftteilchen haben kleine Verschiebungen, deren Radialteil $= \delta$ ist. Die Radialgeschwindigkeit wird

$$v_r = \frac{\partial \delta}{\partial r} \quad \ldots \quad (40).$$

Die Luft wird als nichtzähe zusammendrückbare Flüssigkeit mit der Schallgeschwindigkeit w_S aufgefaßt. Der Luftdruck wird $p = p_\infty + q$, wo p_∞ der Luftdruck in unendlicher Entfernung vom Zylinder und q die geringe Abweichung hiervon ist. Alle Veränderlichen sind Funktionen von y und z bzw. r und φ und vom Ausdrucke $(x - U_S t)$ infolge der Bewegung des Körpers.

Abb. 15. Bezeichnungen für die Ableitung des Lufteinflusses.

Die Navier-Stockesschen Gleichungen lauten bei Vernachlässigung höherer Glieder:

$$\frac{\partial v_r}{\partial t} = -\frac{1}{\varrho_L}\frac{\partial q}{\partial r}, \quad \frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{1}{\varrho_L}\frac{\partial q}{\partial x}, \quad \frac{\partial v}{\partial t} = -\frac{1}{\varrho_L}\frac{\partial q}{\partial y}, \quad \frac{\partial w}{\partial t} = -\frac{1}{\varrho_L}\frac{\partial q}{\partial z} \quad \ldots\ldots \quad (41).$$

Gl. (40) und (41) werden befriedigt durch den Ansatz

$$\delta = \frac{\partial \Phi}{\partial r}, \quad v_r = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial r\, \partial t}, \quad u = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x\, \partial t}, \quad v = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y\, \partial t}, \quad w = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z\, \partial t}, \quad q = -\varrho_L \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} \quad . \; . \quad (42).$$

Die Dichte ϱ_L ist ebenfalls eine Größe mit geringen Abweichungen, so daß in

$$\frac{\partial q}{\partial x} = -\varrho_L \frac{\partial^3 \Phi}{\partial x\, \partial t^2} - \frac{\partial \varrho_L}{\partial x}\frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} \quad \text{usw.}$$

das letzte Glied als Produktglied vernachlässigt werden kann.

Die Kontinuitätsgleichung gibt

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} + \frac{1}{\varrho_L}\frac{\partial \varrho_L}{\partial t} = 0\,.$$

Die Dichteänderung wird auf die Druckänderung bei adiabatischem Vorgang zurückgeführt:

$$p = p_\infty + q = C\,\varrho_L^{\varkappa}, \quad C \text{ — Konstante},$$

$$\frac{\partial q}{\partial t} = \varkappa\, C\, \varrho_L^{\varkappa - 1}\frac{\partial \varrho_L}{\partial t}\,.$$

Mit

$$w_S^2 = \frac{\varkappa\, p}{\varrho_L} = \varkappa C \varrho_L^{\varkappa - 1} \text{ wird } \frac{\partial \varrho}{\partial t} = \frac{1}{w_S^2}\frac{\partial q}{\partial t} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (43).$$

Setzt man diesen Wert, die Geschwindigkeiten und q nach (42) in die Kontinuitätsgleichung ein, so erhält man die Differential-Gleichung für Φ, wobei noch berücksichtigt ist, daß

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} f(x - U_S t) = U_S^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} f(x - U_S t) \text{ ist:}$$

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(1 - \frac{U_S^2}{w_S^2}\right) + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\Phi = 0$$

oder in Polarkoordinaten:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(1 - \frac{U_S^2}{w_S^2}\right) + \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}\right)\Phi = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (44).$$

Für jede Lösung von Φ können die Verschiebung δ und die Druckabweichung q gefunden werden.

Im weiteren werden zwei Sonderfälle untersucht.

1. Φ in Polarkoordinaten unabhängig von φ, rotationssymmetrischer Zustand. Gl. (44) vereinfacht sich in

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(1-\frac{U_S^2}{w_S^2}\right)+\frac{\partial^2}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\right)\Phi=0 \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (45).$$

Für eine Teillösung von Φ und entsprechend für δ und q wird der Ansatz gemacht:

$$\Phi=\Phi^*\cos\zeta\frac{x-U_S t}{a} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (46).$$

Des weiteren setzen wir

$$\zeta_1^2=\zeta^2\left(1-\frac{U_S^2}{w_S^2}\right) \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (47);$$

bei Geschwindigkeiten, die klein sind im Vergleich zur Schallgeschwindigkeit, werden sich ζ_1 und ζ kaum unterscheiden. Dann gibt Gl. (45)

$$\left(-\zeta_1^2+\frac{\partial^2}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\right)\Phi^*=0.$$

Φ^* und auch q^* infolge (42) sind Besselsche Funktionen nullter Ordnung, III. Art (Hankel-Funktion), da für $r\to\infty$ $q\to 0$ geht.

Da $\delta^*=\frac{\partial\Phi^*}{\partial r}$, so wird δ^* eine Besselsche Funktion erster Ordnung, III. Art; für $r\to\infty$ geht ebenfalls $\delta\to 0$.

Wir schreiben: $F_{L_0}(z)=i\,H_0^{(1)}\,i z$ (Hankel-Funktion nach Jahnke-Emde), Lösung der Differential-Gleichung:

$$\left(-1+\frac{\partial^2}{\partial z^2}+\frac{1}{z}\frac{\partial}{\partial z}\right)F_{L_0}(z)=0,$$

$$F_{L_1}(z)=-F_{L_0}{}'(z)=-H_1^{(1)}(i z)$$ (Hankel-Funktion nach Jahnke-Emde), Lösung der Differential-Gleichung:

$$\left(-1+\frac{\partial^2}{\partial z^2}+\frac{1}{z}\frac{\partial}{\partial z}-\frac{1}{z^2}\right)F_{L_1}(z)=0,$$

$$-F_{L_1}{}'(z)=F_{L_0}{}''(z)=F_{L_0}(z)+z^{-1}F_{L_1}(z).$$

(Folge der Differential-Gleichung von $F_{L_0}(z)$.)

Dann wird, falls die Oberflächenabweichung $\bar\delta=\delta^*\cos\zeta\frac{x-U_S t}{a}$ ist:

$$\delta=\delta^*\cos\zeta\frac{x-U_S t}{a}\cdot F_{L_1}\left(\zeta_1\frac{r}{a}\right)\Big/F_{L_1}(\zeta_1),$$

$$\Phi=-\delta^*\cos\zeta\frac{x-U_S t}{a}\cdot a\,F_{L_0}\left(\zeta_1\frac{r}{a}\right)\Big/\zeta_1 F_{L_1}(\zeta_1),$$

$$q=-\delta^*\frac{\varrho_L U_S^2\zeta_1}{a}\cos\zeta\frac{x-U_S t}{a}\cdot F_{L_0}\left(\zeta_1\frac{r}{a}\right)\Big/F_{L_1}(\zeta_1)$$

und die Oberflächenbelastung

$$\bar q=-\varrho_L\frac{U_S^2\zeta_1}{a}\frac{F_{L_0}(\zeta)}{F_{L_1}(\zeta)}\bar\delta=-\varrho_L\frac{U_S^2\zeta_1}{a}\cdot f_0(\zeta_1)\,\bar\delta \quad \ldots \ldots \ldots (48).$$

Zahlentafel 2 gibt Zahlenwerte von $f_0(\zeta_1)$.

Zahlentafel 2.

$f_0(\zeta_1)$ und $f_1(\zeta_1)$ als Funktion von φ_1.

ζ_1	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0	1,2	1,4
f_0	0,246	0,367	0,450	0,509	0,558	0,597	0,629	0,657	0,679	0,699	0,734	0,759
f_1	0,098	0,186	0,264	0,332	0,392	0,441	0,487	0,525	0,559	0,589	0,639	0,679
φ_1	1,6	1,8	2,0	2,5	3,0	3,5	4,0	5,0	6,0	7,0	8,0	9,0
f_0	0,781	0,799	0,814	0,844	0,864	0,880	0,894	0,912	0,925	0,935	0,943	0,949
f_1	0,712	0,738	0,761	0,804	0,837	0,859	0,874	0,899	0,915	0,925	0,938	0,944

Der Druck $\bar{q}$ ist positiv in den Einschnürungen, negativ in den Ausbauchungen, so daß er das Zertropfen unterstützt.

2. $\Phi = \Phi_1 \cos\varphi$, Φ_1 — Funktion von $(x - U_S t)$ und r.

Gl. (44) vereinfacht sich in

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(1 - \frac{U_S^2}{w_S^2}\right) + \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} - \frac{1}{r^2}\right)\Phi_1 = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (49).$$

Für die Radialverschiebungen $\delta = \frac{\partial \Phi}{\partial r}$ gilt dann ebenfalls $\delta = \delta_1 \cos\varphi$. Dem entspricht ein einseitig ausgewellter Körper, bei dem die unveränderten Querschnitte um den Betrag δ_1 nach oben oder unten verschoben sind.

Für eine Teillösung von Φ_1 und entsprechend für δ_1 und q_1 wird der Ansatz gemacht:

$$\Phi_1 = \Phi^* \cos\zeta \frac{x - U_S t}{a} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (50)$$

und wie vorher

$$\zeta_1^2 = \zeta^2\left(1 - \frac{U_S^2}{w_S^2}\right).$$

Dann gibt Gl. (49)

$$\left(-\zeta_1^2 + \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} - \frac{1}{r^2}\right)\Phi^* = 0.$$

Φ^* ist eine Besselsche Funktion erster Ordnung, III. Art; δ^* wird die Ableitung davon nach r.

Für die Oberflächenabweichung $\bar{\delta}$ setzen wir

$$\bar{\delta} = \bar{\delta}^* \cos\zeta \frac{x - U_S t}{a} \cos\varphi$$

und erhalten mit den oben eingeführten Bezeichnungen

$$\delta = \bar{\delta}^* \cos\zeta \frac{x - U_S t}{a} \cos\varphi \cdot F_{L_1}'\left(\zeta_1 \frac{r}{a}\right) \Big/ F_{L_1}'(\zeta_1),$$

$$\Phi = \bar{\delta}^* \cos\zeta \frac{x - U_S t}{a} \cos\varphi \cdot a\, F_{L_1}\left(\zeta_1 \frac{r}{a}\right) \Big/ \zeta_1 F_{L_1}'(\zeta_1),$$

$$q = \bar{\delta}^* \varrho_L \frac{U_S^2}{a} \zeta_1 \cos\zeta \frac{x - U_S t}{a} \cos\varphi \cdot F_{L_1}\left(\zeta_1 \frac{r}{a}\right) \Big/ F_{L_1}'(\zeta_1),$$

und die Oberflächenbelastung

$$\bar{q} = -\varrho_L \frac{U_S^2 \zeta_1}{a} \frac{F_{L_1}(\zeta_1)}{-F_{L_1}'(\zeta_1)} \bar{\delta} = -\varrho_L \frac{U_S^2 \zeta_1}{a} f_1(\zeta_1)\,\bar{\delta} \quad \ldots\ldots\ldots (51).$$

Zahlentafel 2 enthält ebenfalls Zahlenwerte von

$$f_1(\zeta_1) = \frac{F_{L_1}(\zeta_1)}{-F_{L_1}'(\zeta_1)} = 1 : \left(\frac{F_{L_0}(\zeta_1)}{F_{L_1}(\zeta_1)} + \frac{1}{\zeta_1}\right) = 1 : \left(f_0(\zeta_1) + \frac{1}{\zeta_1}\right).$$

Durch die Oberflächenbelastung wird das Zerwellen des Strahles hervorgerufen.

Beim Flüssigkeitsstrahle, der aus einer Düse austritt, nimmt die Wellung zwar mit der Entfernung von der Düse zu. Für jede Stelle im Luftraume bleibt sie aber unverändert, so daß die Lösungen der Fälle 1 und 2 auch für den Düsenstrahl genommen werden.

7. Zertropfen mit Lufteinfluß. Zur Belastung durch die Oberflächenspannung kommt die Belastung durch den Lufteinfluß nach Gl. (48) hinzu. An Stelle der Gl. (21) erhält man für μ die Gleichung:

$$\mu^2 + \mu \frac{3\eta}{\varrho a^2}\zeta^2 = \frac{\alpha}{2\varrho a^3}(1 - \zeta^2)\zeta^2 + \frac{\varrho_L U_S^2}{2\varrho a^2}\zeta^3 f_0(\zeta) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (52).$$

Hierbei ist $\zeta_1 = \zeta$ gesetzt in der Annahme, daß U_S klein ist im Vergleich mit der Schallgeschwindigkeit w_S.

Diese μ-Werte werden auch für den Strahl, der aus einer Düse austritt, genommen. Die Rechnung wird weiter für Wasser als einer nichtzähen Flüssigkeit ($\eta = 0$) durchgeführt mit:

Strahlhalbmesser $a = 0{,}025$ cm, $\alpha = 0{,}072$ gcm^{-1}, $\varrho = 0{,}00102$ gs^{2}cm^{-4}, $\varrho_L/\varrho = 0{,}00129$.

Wir setzen $U_S = 0, = 500, = 1000, = 1500$ und $2000\ \mathrm{cms^{-1}}$ und berechnen für verschiedene ζ die Werte μ. Abb. 16 zeigt den Verlauf. Die μ-Werte werden größer mit wachsendem U_S und treten auch für größere ζ auf. Während ohne Lufteinfluß $\zeta_{\max} = 1$, entsprechend $l_{\min} = 2\pi a = 6{,}3\,a$ ist, wird für $1500\ \mathrm{cms^{-1}}$ $\zeta_{\max} \approx 1{,}4$ entsprechend $l_{\min} \approx 1{,}4\pi a = 4{,}4\,a$. Auch die für den Zerfall günstigsten Werte ζ_{opt} und μ_{opt} werden größer; während für geringere Geschwindigkeiten $\zeta_{\mathrm{opt}} \approx 0{,}7$, $\mu_{\mathrm{opt}} \approx 740\ \mathrm{s^{-1}}$ ist, wird für $1500\ \mathrm{cms^{-1}}$ $\zeta_{\mathrm{opt}} \approx 1{,}1$ und $\mu_{\mathrm{opt}} \approx 1300\ \mathrm{s^{-1}}$.

Die Zertropflänge muß kürzer werden, was auch zu beobachten ist.

Abb. 16. Abhängigkeit der Größe μ von ζ für einen Wasserstrahl $a = 0{,}025$ cm und für die Strahlgeschwindigkeiten $U_S = 0, = 500, = 1000, = 1500$ und $= 2000$ cm/sk.

Abb. 17. Theoretische Zerfallänge L eines Wasserstrahles $a = 0{,}025$ cm bei verschiedenen Strahlgeschwindigkeiten.

Nimmt man an, daß an der Düse nur Anfangsstörungen entsprechend den jeweiligen ζ_{opt} und von gleicher Anfangsstärke auftreten, so werden die Zerfallszeiten $T = \frac{1}{\mu_{\mathrm{opt}}} \ln \frac{a}{\delta^*}$ und die Zerfallängen $L = T U_S = \frac{U_S}{\mu_{\mathrm{opt}}} \ln \frac{a}{\delta^*}$.

Mit $\ln \frac{a}{\delta^*} = 12$, wie er aus den Versuchen für geringe Geschwindigkeiten ermittelt ist, erhält man für $a = 0{,}025$ cm L nach Abb. 17.

Abb. 18. Zerwellen des aus einer Düse austretenden Strahles.

Abb. 19. Kraft dP_L infolge des Lufteinflusses.

Abb. 20. Kraft dP_a infolge der Oberflächenspannung.

Abb. 21. Biegemomente und Querkräfte im Strahlstücke dx.

Der Größtwert der Zerfallänge tritt bei $U_S = 1500\ \mathrm{cms^{-1}}$ ein, die Beobachtungen zeigen einen geringeren Größtwert, der schon bei etwa $600\ \mathrm{cms^{-1}}$ eintritt. Dieses ist darauf zurückzuführen, daß am Zerfalle die cos-Störungen aller ζ-Werte beteiligt sind und diese verschiedene und auch von U_S abhängige Anfangsstärke haben. Bei einer ähnlichen Untersuchung des Zertropfens sehr zäher Flüssigkeiten ergab sich im Gegensatze hierzu, daß die rechnerische Zerfallänge kleiner als die beobachtete ist. Dieses ist darauf zurückzuführen, daß die Luft vom Strahle mitgenommen wird.

Bei den Versuchen zeigten sich schon bei Geschwindigkeiten unter $500\ \mathrm{cms^{-1}}$ Wellungen der Oberfläche mit $\zeta > 3$; diese lassen sich durch den Einfluß der Luft nicht erklären, sondern sind auf periodische in der Düse entstandene Ringwirbel zurückzuführen.

8. Zerwellen durch den Lufteinfluß. Beim Zerwellen ändert sich der Strahlquerschnitt nicht; die Mittellinie (Verbindungslinie der Querschnittsmittelpunkte) erhält geringe Abweichungen δ_1 von der geraden Achse. Die entsprechenden Störungen an der Düse werden in eine Fourrier-Reihe zerlegt. Jede Einzelstörung gibt eine gewellte Linie. Verbindet man das Koordinatensystem mit dem Strahle, so wird, Abb. 18, für eine Einzelstörung

$$\delta_1 = \delta^* e^{\mu\,(t + x/U_S)} \cdot \cos \zeta \frac{x}{a} .$$

Zur Bestimmung von μ wird wie beim Zertropfen ein langer Strahl mit der zeitlich veränderlichen Wellung $\delta_1 = \delta^* e^{\mu\, t} \cos \zeta \frac{x}{a}$ untersucht, der sich mit der Geschwindigkeit U_S durch die Luft bewegt. Die Zulässigkeit dieser Vereinfachung war beim Zertropfen gezeigt.

Die Kräfte, die auf den Strahl wirken, entstehen durch den Lufteinfluß und die Oberflächenspannung. Der Lufteinfluß ist durch $\bar{q}$ Gl. (51) gegeben, wobei $U_S < w_S$ angenommen und $\zeta_1 = \zeta$ gesetzt wird. Auf das Stück dx des Strahles erhält man die Kraft, Abb. 19:

$$d P_L = \int_0^{2\pi} (-\bar{q}\, d x \cos^2 \varphi\, a)\, d\varphi = \pi\, \varrho_L\, U_S^2\, \zeta f_1(\zeta)\, \delta_1\, d x .$$

Die Oberflächenspannung ruft auf das Stück dx nach Gl. (1) oder unmittelbar nach Abb. 20 die Kraft hervor:

$$d P_\alpha = \frac{2 \pi a \alpha}{R}\, d x = 2 \pi a \alpha\, \delta_1''\, d x = -\frac{2 \pi \alpha}{a}\, \zeta^2 \delta_1\, d x .$$

Der Strahl kann als Balken betrachtet werden, der auf Schub und Biegung beansprucht wird. Das Biegemoment für die Stelle x ist $M = M^* \cos \zeta \frac{x}{a}$, die Querkraft $Q = Q^* \sin \zeta \frac{x}{a}$; Vorzeichen nach Abb. 21.

Man erhält daraus für die Verschiebung der Mittellinie $\delta_1 = \delta_M + \delta_Q$, wenn die bekannten Formeln des elastischen Problemes sinngemäß geändert werden:

$$\frac{M}{3 J \eta} = \frac{\partial^3 \delta_M}{\partial x^2 \partial t} = -\frac{\zeta^2}{a^2} \mu\, \delta_M$$

$$\frac{\partial Q}{\partial x} \frac{1{,}2}{F \eta} = \frac{\partial^3 \delta_Q}{\partial x^2 \partial t} = -\frac{\zeta^2}{a^2} \mu\, \delta_Q .$$

Das Teilchen dx hat die Beschleunigung $\frac{\partial^2 \delta_1}{\partial t^2}$ und die Winkelbeschleunigung $\frac{\partial^3 \delta_M}{\partial t^2 \partial x}$.

Nach dem D'Alembertschen Prinzip führen wir die Trägheitskräfte ein, Abb. 18:

$$d P_T = -\frac{\partial^2 \delta_1}{\partial t^2} \varrho F\, d x = -\mu^2 \varrho F \delta_1\, d x$$

$$d M_T = -\frac{\partial^3 \delta_M}{\partial t^2 \partial x} \varrho J\, d x = -\mu^2 \varrho J \frac{\partial \delta_M}{\partial x}\, d x .$$

Die Gleichgewichtsbedingungen geben:

$$d P_\alpha + d P_L + d P_T + d Q = 0,$$

$$d M_T + d M + Q\, d x = 0 .$$

(Der Zustand wird statisch für einen bestimmten Zeitpunkt untersucht, so daß dM statt $\frac{\partial M}{\partial x} dx$ usw. geschrieben ist.)

Beseitigt man aus diesem System von Gleichungen alle Größen bis auf δ_1, so erhält man mit $J = \pi a^4/4$ und $F = \pi a^2$:

$$\mu^2 + \mu \frac{\eta \zeta^2}{1{,}2 \varrho a^2} \frac{3 \frac{\eta \zeta^2}{\varrho a^2} + \mu}{\frac{10}{3} \frac{\eta}{\varrho a^2} + 3 \frac{\eta \zeta^2}{\varrho a^2} + \mu} = \frac{\varrho_L}{\varrho} \frac{U_S^2}{a^2} \zeta f_1(\zeta) - \frac{2 \alpha}{a^3 \varrho} \zeta^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (52).$$

Auf der rechten Seite stehen die Glieder, die den Zerfall hervorrufen, bzw. verhindern. Bei Flüssigkeiten ohne Zähigkeit bleibt links nur μ^2 nach; das sind die größten μ für eine bestimmte rechte Seite. Infolge der Zähigkeit wird μ geringer. Die Gl. (52) läßt sich auf eine Gleichung 3. Grades zurückführen, die Berechnung nach Gl. (52) ist jedoch recht bequem. Man berechnet eine erste Näherung von μ durch Vernachlässigung des zweiten Gliedes links. Dann setzt man dieses μ in das zweite Glied ein, findet eine zweite Näherung usw.

Als Beispiel sei ein Glyzerinstrahl genommen mit: $a = 0{,}025$ cm, $\varrho = 0{,}00125$ gs²cm⁻⁴, $\alpha = 0{,}066$ gcm⁻¹, $\eta = 9{,}3 \cdot 10^{-4}$ gscm⁻², $\varrho_L/\varrho = 0{,}00106$. Für jedes ζ ist eine Mindestgeschwindigkeit $U_{S1\,\min}(\zeta)$ erforderlich. Und zwar muß die rechte Seite mindestens gleich null sein:

$$U_{S1\,\min}(\zeta) = \sqrt{\frac{2\alpha}{a^2\varrho}\frac{\varrho}{\varrho_L}\frac{\zeta}{f_1(\zeta)}} = 2000\sqrt{\frac{\zeta}{f_1(\zeta)}}\ \mathrm{cms^{-1}}.$$

Man erhält für

$\zeta =$	0	0,4	0,8	1,2	1,6	2,0	2,5	3,0
$U_{S1\,\min}(\zeta) =$	20	20,4	24,7	27,4	30,0	32,4	35,2	37,9 ms⁻¹.

Für $\zeta = 0$ erhält man die geringste Geschwindigkeit $U_{S1\,\min}(0)$, bei der das Zerwellen auftritt.

Mit wachsender Geschwindigkeit treten erst lange, dann kürzere Wellen auf. Bei dem Strahlhalbmesser $a = 0{,}025$ cm wird $U_{S1\,\min}(0) \approx 20$ ms⁻¹ für Wasser und Glyzerin und ≈ 15 ms⁻¹ für Gasöl und Rizinusöl, so daß bei den letzteren Flüssigkeiten das Zerwellen bei geringeren Geschwindigkeiten zu beobachten ist.

Nach Gl. (52) sind für die Geschwindigkeiten $U_S = 25$ ms⁻¹, 30 ms⁻¹, 40 ms⁻¹ und 50 ms⁻¹ die μ-Werte berechnet und in Abb. 22 dargestellt.

Für eine bestimmte Geschwindigkeit erhält man für ζ_{opt} den Größtwert μ_{opt}. Sind die Anfangsstörungen für alle ζ in gleicher Größe vorhanden, so wird sich μ_{opt} am stärksten durchsetzen; ζ_{opt} nimmt mit wachsender Geschwindigkeit zu, d. h. die Wellenlänge ab, was auch zu beobachten ist. Nimmt man an, daß die Anfangsstörungen an der Düse nur den jeweiligen ζ_{opt} entsprechen, daß δ^* an der Düse stets dieselbe Größe hat und daß bis zum Zerfalle δ^* nach dem Exponentialgesetze bis h, einem bestimmten Vielfachen von a, anwächst, so wird die Zerfallszeit $T = \frac{1}{\mu_{\text{opt}}}\left(\ln \frac{h}{\delta^*_{\text{Düse}}}\right)$ und die Zerfalllänge $L = U_S T$.

Abb. 22. Abhängigkeit der Größe μ für das Zerwellen von ζ für einen Glyzerinstrahl $a = 0{,}025$ cm und für die Strahlgeschwindigkeiten $U_S = 25$, $= 30$, $= 35$, $= 40$ und $= 50$ m/sk.

Für das Beispiel wird für

$U_S =$	20	25	30	40	50	60 ms⁻¹
$L/\ln\left(\frac{h}{\delta^*_{\text{Düse}}}\right) =$	∞	$^1/_{22}$	$^1/_{430}$	$^1/_{720}$	$^1/_{1060}$	$^1/_{1160}$ m.

Die Wellenlänge nimmt mit wachsendem U_S erst schnell, dann langsamer ab, wie auch beobachtet wird. Auch hier treten Abweichungen zwischen Rechnung und Versuchen ein, da die anliegende Luft vom Strahle mitgenommen wird.

9. Schlußbemerkungen. Die Zerfallerscheinungen des Strahles, die bei nicht zu hohen Geschwindigkeiten zu beobachten sind, das Zertropfen und das Zerwellen, werden theoretisch untersucht.

Rotationssymmetrische Störungen führen zum Zertropfen. Die Zerfallzeit ist für jede Flüssigkeit und Strahlstärke bei geringen Geschwindigkeiten unveränderlich, die Zerfallänge wächst mit der Geschwindigkeit. Die Zerfallzeit und die Wellenlänge des Zertropfens hängen von den physikalischen Größen des Strahles ab; Theorie und Versuche zeigen eine gute Übereinstimmung. Durch den Einfluß der Luftkräfte wird theoretisch die Zerfallzeit kürzer, so daß mit wachsender Geschwindigkeit auch die Zerfallänge abnimmt, doch ergeben die Versuche ein stärkeres Abnehmen.

Das Zerwellen erklärt sich aus dem Einflusse der Luftkräfte, und es werden Gesetzmäßigkeiten abgeleitet, die mit den Versuchsergebnissen dem Charakter nach übereinstimmen.

KLEINE MITTEILUNGEN

Integration der Ausflußgleichung. 1. Für die Berechnung des Zeitquerschnittes $\int f\,dt$ der Steueröffnungen von Verbrennungsmaschinen wird im unterkritischen Druckgebiet die Ausflußformel in folgenden Gestalten benützt:

$$\int f\,dt = \frac{V_i}{\varkappa\,\varphi\sqrt{p_i\,v_i}}\cdot\left(\frac{p_i}{p_a}\right)^{\frac{1}{2}-\frac{1}{2\varkappa}} \cdot\int\frac{d\left(\frac{p_a}{p}\right)}{\left(\frac{p_a}{p}\right)^{\frac{1}{2\varkappa}+\frac{1}{2}}\sqrt{2g\cdot\frac{\varkappa}{\varkappa-1}\left[\left(\frac{p_a}{p}\right)^{\frac{2}{\varkappa}}-\left(\frac{p_a}{p}\right)^{\frac{\varkappa+1}{\varkappa}}\right]}} \quad (1)^{1)}$$

oder mit Einführung der Gleichung der Adiabate $p\,v^{\varkappa} = p_a\,v_a{}^{\varkappa} = p_i\,v_i{}^{\varkappa}$:

$$\int f\,dt = \frac{V_i\cdot v_a^{\frac{\varkappa-1}{2}}}{\varphi\sqrt{p_i\,v_i{}^{\varkappa}}}\cdot\int\frac{d\left(\frac{v}{v_a}\right)}{\left(\frac{v}{v_a}\right)^{\frac{5-\varkappa}{2}}\sqrt{2g\cdot\frac{\varkappa}{\varkappa-1}\left(1-\left(\frac{v}{v_a}\right)^{\varkappa-1}\right)}} \quad . \; . \; (2).$$

Die Integration der rechten Seite wurde meines Wissens bisher nur unter gewissen Vereinfachungen[2]) oder durch eine einzelne Zufallslösung[3]) durchgeführt. Sie läßt sich aber unmittelbar bewerkstelligen, und zwar für solche Werte von $\varkappa$, für welche $\frac{1}{2}\cdot\frac{\varkappa+1}{\varkappa-1}$ gleich einer ganzen Zahl n wird. Man bringt die Gl. (1) durch Heraussetzen der unveränderlichen Werte, durch Zusammenfassen und Ausscheiden auf die Form

$$\int f\,dt = \frac{V_i}{\varkappa\,\varphi\sqrt{p_i\,v_i}}\cdot\left(\frac{p_i}{p_a}\right)^{\frac{1}{2}-\frac{1}{2\varkappa}}\cdot\frac{1}{\sqrt{2g\cdot\frac{\varkappa}{\varkappa-1}}} \cdot\int\frac{d\left(\frac{p_a}{p}\right)}{\left(\frac{p_a}{p}\right)^{\frac{\varkappa+3}{2\varkappa}}\sqrt{1-\left(\frac{p_a}{p}\right)^{\frac{\varkappa-1}{\varkappa}}}} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; (1a).$$

Durch die Substitutionen

$$\sqrt{1-\left(\frac{p_a}{p}\right)^{\frac{\varkappa-1}{\varkappa}}} = u \text{ in (1a) u. } \sqrt{1-\left(\frac{v}{v_a}\right)^{\varkappa-1}} = w \text{ in (2)}$$

erhalten die Gleichungen die Form

$$\int f\,dt = \frac{V_i}{\varkappa\,\varphi\sqrt{p_i\,v_i}}\cdot\left(\frac{p_i}{p_a}\right)^{\frac{1}{2}-\frac{1}{2\varkappa}} \cdot\frac{1}{\sqrt{2g\cdot\frac{\varkappa}{\varkappa-1}}}\cdot\frac{(-2)\cdot\varkappa}{\varkappa-1}\int\frac{d\,u}{(1-u^2)^{\frac{1}{2}\cdot\frac{\varkappa+1}{\varkappa-1}}} \quad . \; . \; (1b)$$

und

$$\int f\,dt = \frac{V_i\,v_a^{\frac{\varkappa-1}{2}}}{\varphi\sqrt{p_i\,v_i{}^{\varkappa}\cdot 2g\cdot\frac{\varkappa}{\varkappa-1}}} \cdot\frac{(-2)}{\varkappa-1}\cdot\int\frac{d\,w}{(1-w^2)^{\frac{1}{2}\cdot\frac{\varkappa+1}{\varkappa-1}}} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (2b).$$

Wenn nun $\frac{1}{2}\cdot\frac{\varkappa+1}{\varkappa-1}$ gleich einer ganzen Zahl n wird, gehen die Integrale über in

$$A\cdot\int\frac{d\,u}{(1-u^2)^n} \quad\text{und}\quad B\cdot\int\frac{d\,w}{(1-w^2)^n}$$

und können durch Partialbruchzerlegung ausgewertet werden; für $n=3$, was $\varkappa = 1{,}4$ ergibt, lautet die Lösung z. B. für Gl. (2b):

$$\int f\,dt = \frac{V_i\cdot v_a^{\frac{\varkappa-1}{2}}}{\varphi\sqrt{p_i\,v_i{}^{\varkappa}\cdot 2g\cdot\frac{\varkappa}{\varkappa-1}}}\cdot\frac{-2}{\varkappa-1}$$

$$\cdot(-1)\left(\frac{1}{4}\cdot\frac{\sqrt{1-\left(\frac{v}{v_a}\right)^{\varkappa-1}}}{\left(\frac{v}{v_a}\right)^{2(\varkappa-1)}}+\frac{3}{8}\cdot\frac{\sqrt{1-\left(\frac{v}{v_a}\right)^{\varkappa-1}}}{\left(\frac{v}{v_a}\right)^{\varkappa-1}} +\frac{3}{16}\ln\frac{1+\sqrt{1-\left(\frac{v}{v_a}\right)^{\varkappa-1}}}{1-\sqrt{1-\left(\frac{v}{v_a}\right)^{\varkappa-1}}}\right)_{v=v''}^{v=v'} \quad . \; . \; (3).$$

Die Ausrechnung ist einfach, da die gleichen Werte wiederholt vorkommen; sie kann mit dem log-log-Rechenschieber bewältigt werden.

2. Die Lösung kann in der allgemeinen Form geschrieben werden

$$\int\frac{d\,u}{(1-u^2)^n} = \frac{1}{2n-2}\cdot\frac{u}{(1-u^2)^{n-1}} +\frac{2n-3}{2n-2}\int\frac{d\,u}{(1-u^2)^{n-1}}\;^{4)} \quad . \; . \; . \; (3a).$$

Die Zerlegung in Partialbrüche wird dadurch unnötig. Man kann also für andere ganze Zahlen n und zugehörige Werte von $\varkappa$ sofort integrieren und den Zeitquerschnitt $\int f\,dt$ abhängig von $\varkappa$ als Kurve auftragen, hieraus dann durch Interpolation den Wert von $\int f\,dt$ finden, der dem gewünschten $\varkappa$ entspricht. Die Durchrechnung eines bestimmten Falles zeigte, daß der Zeitquerschnitt von $\varkappa = 1{,}4$ $(n = 3)$ bis $\varkappa = 1{,}286$ $(n = 4)$ um 10 vH zunahm, wobei die Interpolation für $\varkappa = 1{,}333$ etwa 5 vH ergab. Man kann also für die häufig benutzten Werte $\varkappa = 1{,}36$, $\varkappa = 1{,}41$ schließlich auf eine Interpolation ganz verzichten und einfach mit dem für $\varkappa = 1{,}40$ gefundenen Werte rechnen, zumal dem Werte des Durchflußkoeffizienten φ bisher eine noch größere Unsicherheit anhaftet.

[1]) W. Schüle, Technische Thermodynamik, 4. Aufl. II S. 375 nach Gl. (9).

[2]) W. Schüle, a. a. O.; Gutmann in Z. VDI Bd. 48, Nr. 20 (1914); M. Ringwald in Z. VDI Bd. 67, Nr. 46 (1923).

[3]) A. Kreglewski: Die Spül- und Auspuffvorgänge usw. Berlin 1913, Verlag f. Fachliteratur.

[4]) Laská, Mathematische Formelsammlung, Braunschweig, Friedr. Vieweg u. Sohn 1888 bis 1894, S. 139 Ziff. 35.

3. Auch die von Schüle[1]) benutzte allgemeine Form der Ausflußgleichung

$$\int f\,dt = \frac{V_i}{m\,\varphi\sqrt{p_0\,v_0}} \cdot \left(\frac{p_0}{p_a}\right)^{\frac{1}{2}-\frac{1}{2\,m}} \cdot \int \frac{d\left(\frac{p_a}{p_i}\right)}{\left(\frac{p_a}{p_i}\right)^{\frac{1}{2\,m}+\frac{1}{2}} \cdot \sqrt{2\,g\,\frac{\varkappa}{\varkappa-1}\left[\left(\frac{p_a}{p_i}\right)^{\frac{2}{\varkappa}} - \left(\frac{p_a}{p_i}\right)^{\frac{\varkappa+1}{\varkappa}}\right]}} \quad (4),$$

wobei für den Rückstand im Ausflußgefäß polytropische Zustandsänderung $p_0\,v_0^m = p_i\,v_i^m$ vorausgesetzt ist, läßt sich für gewisse Werte von m und $\varkappa$ ohne Vernachlässigung integrieren. Sie geht durch die gleichen Operationen wie unter 1. in die Form über

$$\int f\,dt = \frac{V_i}{m\,\varphi\sqrt{p_0\,v_0}} \cdot \left(\frac{p_0}{p_a}\right)^{\frac{1}{2}-\frac{1}{2\,m}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\,g\cdot\frac{\varkappa}{\varkappa-1}}} \cdot \int \frac{d\left(\frac{p_a}{p_i}\right)}{\left(\frac{p_a}{p_i}\right)^{\frac{1}{2\,m}+\frac{1}{2}+\frac{1}{\varkappa}} \cdot \sqrt{1-\left(\frac{p_a}{p_i}\right)^{\frac{\varkappa-1}{\varkappa}}}} \quad . \; . \; . \quad (4a)$$

und durch die Substitution

$$\sqrt{1-\left(\frac{p_a}{p_i}\right)^{\frac{\varkappa-1}{\varkappa}}} = u$$

in

$$\int f\,dt = \frac{V_i}{m\,\varphi\sqrt{p_0\,v_0}} \cdot \left(\frac{p_0}{p_a}\right)^{\frac{1}{2}-\frac{1}{2\,m}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\,g\cdot\frac{\varkappa}{\varkappa-1}}} \cdot (-2)\,\frac{\varkappa}{\varkappa-1} \cdot \int \frac{d\,u}{(1-u^2)^{\frac{\varkappa\,(m+1)}{2\,m\,(\varkappa-1)}}} \quad . \; . \; . \; . \; . \quad (4b).$$

Jetzt muß also $n = \frac{\varkappa\,(m+1)}{2\,m\,(\varkappa-1)}$ eine ganze Zahl sein, d. h. man muß aufeinander abgestimmte Werte von m und $\varkappa$ aufsuchen. Es ergeben sich z. B.

$\varkappa = 1{,}41$ $m = 1{,}33$ für $n = 3$ (für Gase brauchbar)
$\varkappa = 1{,}33$ $m = 1{,}0$ für $n = 4$ (für Heißdampf brauchbar).

4. In vielen Fällen, besonders bei Vergleichsrechnungen und kleinen Druckverhältnissen, genügt es, die Integration dadurch zu ermöglichen, daß man in Gl. (2) unter der Wurzel vom Volumenverhältnis auf das Temperaturverhältnis übergeht und

$$\left(\frac{v}{v_a}\right)^{\varkappa-1} = \frac{T_a}{T} \quad . \; . \; . \; . \; . \quad (5)$$

setzt. An Stelle der innerhalb der Integrationsgrenzen veränderlichen Temperatur T setzt man dann ihren Mittelwert (vielleicht besser noch ihren Höchstwert) innerhalb dieser Grenzen; dies kommt natürlich auf die Einführung einer mittleren Geschwindigkeit hinaus.

Gl. (5) kann auch zur Vereinfachung der Ausrechnung von Gl. (3) benützt werden.

München, den 27. November 1930.

G. Marx. 137

Experimentelle Lösung des ebenen Spannungsproblems. Bekanntlich kann man an einem ebenen Versuchskörper mittels polarisiertem Licht die Differenz der Hauptspannungen $\sigma_1 - \sigma_2$ messen. Um dann noch σ_1 und σ_2 jedes für sich zu bestimmen, liegen gewisse Integrationsverfahren vor, oder man kann auch $\sigma_1 + \sigma_2$ finden durch Messung der Querkontraktion am Versuchskörper. Das letzte Verfahren ist jedoch mit großen Ungenauigkeiten verbunden, da die Querkontraktion sehr klein ist.

Es ist möglich, die Summe der Hauptspannungen durch ein Seifenhautgleichnis zu bestimmen. Dazu beachte man, daß

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial\,x^2} + \frac{\partial^2}{\partial\,y^2}\right)(\sigma_1 + \sigma_2) = 0\,.$$

An den Rändern des Versuchskörpers ist die eine Hauptspannung σ_1 parallel zum Rande, während σ_2 gleich Null ist. Darum ist am Rande $\sigma_1 + \sigma_2 = \sigma_1 - \sigma_2$.

Man braucht also bloß eine Seifenhaut zu spannen (ohne irgendwelchen Überdruck auf einer Seite), welche an den Rändern Ordinaten hat, die aus dem Ergebnis des optischen Versuchs entnommen werden. Die Ordinaten dieser Haut bestimmen dann im ganzen Körper $\sigma_1 + \sigma_2$. Daß eben die Ordinate und nicht etwa die Neigung der Fläche gemessen wird, dürfte praktisch eine gute Genauigkeit der Messung gewährleisten. Übrigens hat ein Seifenhautgleichnis dieser Art den Vorteil, daß man sich eine Vorstellung des Spannungsverlaufs verschaffen kann, ohne den Versuch wirklich auszuführen.

Göttingen, den 7. Dezember 1930.

J. P. Den Hartog. 140

Das Problem des kleinsten Flugplatzes. Flughäfen werden meist unter Anpassung an das verfügbare Gelände so angelegt, daß man sich der Kreisform möglichst nähert. Diese wird stillschweigend als die vorteilhafteste Möglichkeit angesehen, die für das Starten und Landen nach allen Windrichtungen hin erforderliche Rollänge, etwa 600 m, bei hinreichender seitlicher Ausweichmöglichkeit für gleichzeitig startende und landende andere Flugzeuge unterzubringen. Dies beruht jedoch auf einem Vorurteil, das wohl durch die allgemeine Vertrautheit mit einer Minimaleigenschaft des Kreises — kleinster Umfang, also in diesem Fall kürzeste Umzäunung, einer gegebenen Fläche — zu erklären ist.

Theoretisch[1]) führt die Aufgabe, die gegebene Rollänge nach allen Himmelsrichtungen hin auf einer möglichst kleinen Fläche unterzubringen, auf den Steinerschen Dreispitz, die Hypozykloide, deren Rollkreisdurchmesser ein Drittel des Grundkreisdurchmessers ist. Diese hat, wie man zeigen kann, die Eigenschaft, daß alle ihre Tangenten in ihrem Innern die gleiche Länge aufweisen. Ferner hat sie die halbe Fläche wie der Kreis mit derselben Strecke als Durchmesser. Wählt man für diese also die Rollänge, so könnte man bei einem Flughafen von Dreispitzform theoretisch mit der halben Fläche für Grunderwerb, Einebnung, Trockenlegung und Ansamung auskommen.

Leider hat diese Gestalt aber gewisse Nachteile: man müßte immer am Zaun entlang starten, wenn man die ganze Rollänge ausnutzen wollte. Gleichzeitiges Starten oder Landen mehrerer Flugzeuge in derselben Richtung wäre nicht auf der

[1]) E. Everling, Flugplatzgeometrie. Verkehrstechnische Woche Band 24, Heft 31 vom 30. Juli 1930, S. 413 bis 416; dort werden noch weitere Flugplatzformen erörtert.

ganzen Rollänge möglich. Die Gebäude und Zufahrtswege lassen sich an den gekrümmten Begrenzungen schlecht anlegen. Daher ist die Gestalt des gleichseitigen Dreiecks mit der Rollänge als Höhe vorzuziehen; bei dieser nützt man den Platz nicht ganz so gut aus, spart aber gegenüber dem Kreis noch 26 vH der Fläche, erhält gerade Begrenzungen für Gebäude, Zäune und Straßen sowie größere seitliche Bewegungsfreiheit. Dabei wird — ebenso wie beim Dreispitz — das Rollfeld viel gleichmäßiger abgenutzt als bei der Kreisform, bei der jede Bewegung der Flugzeuge auf dem Boden durch die Mitte führt.

Will man neben der vorgeschriebenen Rolllänge auch eine gewisse Breite der Rollbahn, etwa 120 m für Startstreifen, Landestreifen und die dazwischenliegende Schutzzone vorsehen, so verallgemeinert sich die Aufgabe: die kleinste Fläche zu finden, auf der sich ein Rechteck in beliebiger Orientierung unterbringen läßt. Diese Fläche geht für das betrachtete Seitenverhältnis von etwa 1 : 5 aus den besprochenen Formen durch Verbreitern und Abrunden hervor. Auch diese praktisch günstigste Gestalt ist von der heute bevorzugten Kreisform noch recht verschieden. Selbst wenn man statt des Rechtecks 1 : 5 ein Quadrat setzen müßte, bliebe man mit der erforderlichen Fläche rund 13 vH unter der des Kreises. E. Everling. 141

Schnellverfahren zur Ermittlung von Eingriffslinie und Gegenprofil bei gegebenem Zahnprofil oder des Fräsereinschnittes beim Abwälzverfahren. — Aufgabe. Es soll unter Voraussetzung ständig gleichförmiger Winkelgeschwindigkeit zweier ineinandergreifenden Zahnräder oder Daumenscheiben zu dem beliebig gewählten Zahnumriß (Profil) des einen Rades die gegendrückende Flanke (das Gegenprofil) für die Zähne des eingreifenden andern Rades ermittelt werden. —

Es wird hierfür im folgenden ein sehr bequemes und rasches Verfahren angegeben, bei dem das Zusammenspielen von Profil, Eingriffsort und Gegenprofil dauernd anschaulich vor Augen tritt, ohne daß dazu die Mittelpunkte der Radkreise gebraucht werden.

Abb. 1 zeigt die Anwendung gleich für einen recht mannigfaltigen Fall. Das ist nur dank der großen Einfachheit des Verfahrens gleich möglich. Dort ist zu dem beliebig gewählten Flankenprofil A des Rades um 0_1 mit dem Teilkreis oder der Erzeugungswälzbahn W_1 die Eingriffslinie E und das passende Gegenprofil B am Rade um 0_2 ermittelt.

Das bisherige Verfahren und seine Umständlichkeit. Zunächst ist wie üblich von dem in Abb. 1 auf der Verbindung $0_1 0_2$ liegenden Wälzpunkt C aus nach rechts und links auf den Wälzbahnen W_1 und W_2 in gleichen Abständen eine Reihe Teilpunkte oder Zeitmarken 1, 2, 3 ... 6 aufgetragen. Dann sind wie üblich auf das gegebene Profil A von dem auf seinem Wälzkreis W_1 liegenden Teilpunkten die „Normalen" 1—1, 2—2 usw. gefällt. Das gelingt am besten, wenn man den Krümmungskreis an der betreffenden Stelle des Profils ausprobt und die Lote als dessen Radien (z. B. von a aus) durch die betreffenden Teilpunkte zieht.

Hierbei können von gewissen Punkten zwei Lote auf die Flanke gefällt werden, beispielsweise links von C von dem Punkte 3 aus, das zweite Lot ist gestrichelt gezeichnet und sein Fußpunkt auf der Flanke durch 3′ angedeutet. Dagegen sind für Eckpunkte des Profils, z. B. für den oben rechts, Lote von vielen Teilpunkten auf W_1, z. B. von 3, 4, 5 und dem Zwischenpunkt 5,5 möglich, denn bei unendlich kleinem Krümmungshalbmesser der Ecke geht jede Linie zum Eckpunkt zugleich durch den Krümmungsmittelpunkt. Durch Berücksichtigung dieser Eckpunktlote, die alle länger sind als die Flankenlote von den gleichen Teilpunkten, ergibt sich später die in Abb. 1 bei B erkennbare auffällige Aushöhlung oder Unterschneidung der gesuchten Flanke.

Die Profile A und B nach Abb. 1 wären nur in ganz kurzer Länge für Zahnräder brauchbar, um aber die Anwendbarkeit des Verfahrens für recht verschiedenartige Verhältnisse zu zeigen, sind diese Profile bis zu den um 0_1 bzw. 0_2 konzentrischen Teilen ausgedehnt.

Bisher war es nun weiter ganz allgemein üblich (vgl. Hütte, 25. Aufl. 1926, Bd. 1, S. 170/171, Bearb. Prof. Dr.-Ing. Kutzbach, Dresden; sowie Dubbel, Taschenbuch f. d. Maschinenbau, 5. Aufl. 1929, S. 705/706, Bearb. Prof. Dr.-Ing. Schiebel, Prag; und Freytag, Hilfsbuch f. d. Maschinenbau, 6. Aufl. 1920, S. 144/145 sowie Prof. Dr.-Ing. Rötscher, Maschinenelemente, 1929, Bd. 2, S. 1031), die Normalen z. B. unten links von C die Strecke 3—3′ mittels eines Dreiecks $33'0_1$ um den Mittelpunkt 0_1 zu schwenken und als Schnitt der Kreisbögen mit 3—3′ um C und mit $3'0_1$ um 0_1 den Punkt 3′ auf der Eingriffslinie E zu finden; und sodann das mit diesem Punkt 3′ (dem Eingriffsort) gebildete Dreieck $3'\,C\,0_2$ um 0_2 zurückzuschwenken, d. h. durch je einen Kreisbogen mit $3'0_2$ um 0_2 und $3'C$ um den links von C auf W_2 liegenden Teilpunkt 3 den Punkt 3′ des Gegenprofils B zu ermitteln.

Diese bisher benutzten Dreiecke sind aber bei Rädern von nicht ganz kleinem Durchmesser äußerst unbequem, zumal man zwecks größerer Genauigkeit die Verzahnungen gern in mehrfacher Vergrößerung aufzeichnet. Für die Schwenkung der Dreiecke muß man den Zirkel meist fortgesetzt von einem sehr großen auf einen sehr kleinen Radius umstellen und sogar Präzisions-„Stangenzirkel" und „Reißzeugzirkel" in ständigem Wechsel (ständiger Werkzeugwechsel) nacheinander gebrauchen. Auch wird jedesmal beim Einstechen in die entfernten Mittelpunkte 0_1 und 0_2 der Blick und die Aufmerksamkeit von der betreffenden Zahnstelle abgelenkt.

Bei dem 1929 in der Zeitschrift Maschinenbau, Bd. 8, S. 1469 bis 1471, angegebenen neuen Verfahren ist diese Ablenkung noch größer, denn statt der zwei entfernten Punkte 0_1 und 2_2 müssen noch, wenn die Wälzbahn W_1 etwa $2n$ Teilpunkte hat, insgesamt $2n$ ebenso ferne Punkte wie O_2 mit abermals gleichen Abständen erst genau ermittelt und dann in richtiger Zuordnung aufgesucht werden; auch muß hier sogar ein Kreis mit einem Radius gleich der Summe der Wälzkreisradien gezogen und ein im Vergleich zum Verzahnungsbereich sehr großes Papierformat benutzt werden.

Das Schnellverfahren des Verfassers. Bei dem jetzigen Verfahren dagegen werden nur kleine stets gänzlich innerhalb des Verzahnungsbereichs liegende Dreiecke, z. B. in Abb. 1 rechts für den Punkt 4 auf Flanke A das Dreieck $4\,4\,C$ benutzt, dessen Basis der Bogen $4\,C$ des Wälzkreises W_1 ist. Diese Dreiecke bestimmen in überraschend einfacher und anschaulicher Weise ohne weiteres sowohl die betreffenden Punkte der Eingriffslinie E als auch die des Gegenprofils B.

Das Prinzip des neuen Verfahrens ist nun in Abb. 2 einprägsam dargestellt. Dort soll für den rechts von C liegenden Punkt 3 des Profils A der zugehörige Punkt der Eingriffslinie E und des Gegenprofils B bestimmt werden. Der Punkt 3 auf A ergab sich durch das auf A vom Teilpunkt 3 der Wälzbahn W_1 gefällte Lot.

Das zu benutzende, auf dem Wälzkreis W_1 sitzende Ausgangsdreieck mit dem Punkt 3 auf A ist schraffiert gezeichnet. Die Schraffur ist parallel zur Normalen 3—3.

Dieses Dreieck kam bisher in keinem Verfahren vor. Es ist sogar von Reuleaux (vgl. F. Reuleaux, Der Constructeur, 3. Aufl. 1869, S. 411 Abschn. I u. S. 412 Abschn. II) weder in seinem „zweiten" oben gekennzeichneten, dem bisher allgemein benutzten Verfahren, noch in seinem „ersten", schon nach seiner eigenen Meinung schwierigeren Verfahren angegeben.

gestrichelt. Die gemeinsame Gerade 3 C dieser beiden Dreiecke stellt die in dieser Lage beim Sichberühren oder Eingriff der betreffenden Punkte 3 des Profils und Gegenprofils zusammenfallenden Normalen vor. Nach dem Grundgesetz der Verzahnung kommen ja die betreffenden Punkte von Profil und Gegenprofil dann in Eingriff, wenn ihre beiden Profilnormalen zusammenfallen.

Verschiebe nun dieses Dreieck längs seines Kreisbogens W_2 nach der Seite hin, bis es mit seinem andern Ende im Wälzpunkt C liegt. (Zeichnerisch geschieht dies einfach durch Kreisbogen mit Strecke 3—3 um C und mit C 3 um Punkt 3 auf W_2 rechts von C.) Die Spitze des Dreiecks in dieser Lage ist dann der gesuchte Punkt 3 des Gegenprofils in seiner wirklichen Lage zur Flanke A bei der in der Zeichnung zugrunde gelegten Stellung des Rades mit W_1.

Abb. 1.

Abb. 2.

Abb. 3.

Abb. 1. Das Gegenprofil B zum gegebenen Zahnprofil A und die Kurve E ihrer Berührungsorte im Raum oder aber die von einem Zahnradhobel beliebiger Form A, der sich um O_1 dreht, in dem zu verzahnenden Radkörper, der sich um O_2 dreht, bei diesem „Abwälzverfahren" erzeugte Zahnflanke B einschließlich der hierbei etwa auftretenden Unterhöhlung des erzeugten Zahnes wird in Abb. 1 mit Hilfe des in Abb. 3 im Prinzip veranschaulichten einfachen Schnellverfahrens ermittelt.

Abb. 2. Prinzipbild des Schnellverfahrens. Punkt 3 auf A mit seinem Wälzkreisdreieck C 3 3 über W_1 wird nach links von C geschnellt; die Spitze 3 des Dreiecks zeigt dann den Punkt im Raum, wo sich Punkt 3 der Flanke A und die gedrückte Gegenflanke B berühren. Durch Rückschnellen des dort zu findenden Dreiecks C 3 3 über W_2 nach rechts von C ergibt dessen Spitze 3 den Punkt 3 der Gegenflanke B in seiner augenblicklichen Lage gegenüber Flanke A.

Abb. 3. Dasselbe Verfahren wie in Abb. 2, jedoch bei beliebiger Lage der Flanke A. In Abb. 2 ging die Flanke A ausgewählt durch den Wälzpunkt C.

Gerade mit diesem Dreieck aber arbeitet es sich außerordentlich leicht und greifbar anschaulich, wie folgt.

Die neue Arbeitsregel. Verschiebe dieses Dreieck (s. Abb. 2) längs der Wälzbahn W_1 nach der andern Seite von C, bis es mit dem andern Ende seiner Basis in C liegt. (Zeichnerisch geschieht dies einfach durch Kreisbogen mit 3—3 um C und mit C 3 um Punkt 3 auf W_1 links von C.) Der erhaltene Punkt ist der Eingriffsort, in dem sich bei der Drehung der beiden Räder Punkt 3 des Profils A mit dem zugehörigen Punkt des Gegenprofils B berührt.

Jetzt fasse den Punkt 3 der Eingriffslinie E als Spitze eines EW_2-Dreiecks über dem Bogen von C bis zum Punkt 3 des Wälzkreises W_2 auf. Auch dieses Dreieck ist in Abb. 2 schraffiert, aber

Suchen und Greifen gespart. Aufmerksamkeit konzentriert. Man braucht also bei diesem neuen Verfahren weiter nichts als vier kurze Zirkelschläge zu machen, um Eingriffslinie und Gegenprofil zu haben, und hierbei verbleibt sogar die Zirkelspitze gleich zweimal, jedesmal beim Abgreifen des nächsten Kreishalbmessers, in derselben Einstichstelle C. Diese Radien sind überdies stets klein und daher auch schnell und bequem mit dem „Reißzeugzirkel" zu

handhaben, und zwar ohne jemals Blick und Aufmerksamkeit vom Verzahnungsgebiet abzulenken, und das einfache „Hin- und Herschnellen" der kleinen Dreiecke auf ihren Wälzbögen W_1 und W_2 ist klar und anschaulich.

Alles Suchen an entlegenen Stellen fällt weg, man hat unmittelbar auf der Wälzbahn die Dreiecke vor sich. Das Verfahren ist außerdem sehr genau, da die Schnitte der Kreisbögenpaare meist ziemlich rechtwinklig erfolgen; wo sie spitz ausfallen, kann man sie sofort mehr rechtwinklig machen, indem man für den zweiten Zirkelschlag die Basis des Dreiecks vorübergehend um ein geeignetes Stück länger nimmt.

Stets anwendbar. In Abb. 2 geht das gegebene Profil A gerade durch den Wälzpunkt C. Daß diese ausgewählte Lage für das neue Verfahren nicht Vorbedingung ist, kann man aus Abb. 3 erkennen, wo ein genau gleiches und gleichlanges Profil A wie in Abb. 2 um einen ganzen Teilabstand von C aus nach rechts gedreht zugrunde gelegt ist. Es ergibt sich in Abb. 3 genau dieselbe Lage und Form der Eingriffslinie wie in Abb. 2 und auch dieselbe Form und Länge des Gegenprofils, letztere jedoch in etwas gedrehter Lage und mit augenblicklich anderem Berührungspunkt. Wenn man die A- und B-Kurve in Abb. 3 auf Pauspapiere durchzeichnet und in Abb. 2 um 0_1 bzw. 0_2 zurückdreht, so decken sie sich restlos.

Übersichtlich auch in verwickeltsten Fällen. In Abb. 1, wo sehr viele Punkte an der Eingriffslinie E und der Gegenflanke B ermittelt und durch Kennzeichen einfachster Art einander zugeordnet sind, ist mit Hilfe dieser Kennzeichen auch die stellenweise sehr große Gleitung der Profile aufeinander auch für die verwickeltsten Stellen gut zu verfolgen, im übrigen sind nur die Ausgangsnormalen zum gegebenen Profil, nicht aber auch die Bestimmungsdreiecke selbst eingezeichnet worden, denn man braucht sie nicht, weil man infolge der Einfachheit und Anschaulichkeit des neuen Verfahrens nicht wie beim Reuleauxschen Verfahren in Verwirrung kommt; vgl. Maschinenbau 1929, Bd. 8, S. 1469, Zeile 9 u. 10, wo es sehr zutreffend heißt: „Die namentlich den Anfänger verwirrenden Hilfskreise um die Mittelpunkte 0_1 und 0_2." —

Bei dem neuen Verfahren sind die Mittelpunkte 0_1 und 0_2 überhaupt nicht erforderlich, vgl. Abb. 2 und 3, man könnte das Verfahren auch bei nicht kreisförmig, sondern ganz beliebig geformten Wälzbahnen W_1 und W_2 ohne weiteres durchführen.

Niemals zu vergessen. Bei der Anwendung ermittle man stets sofort nacheinander Eingriffsort und Punkt des Gegenprofils, also nicht erst nur Eingriffsorte und dann nur Gegenprofilpunkte. Das Verfahren arbeitet dann sehr schnell und mechanisch, ohne viel Aufpassen und Überlegung zu beanspruchen. Auch kann bei ihm jederzeit leicht und schnell für einen beliebigen anfänglich nicht für nötig gefundenen Zwischenteilpunkt der zugehörige E- und B-Punkt bestimmt werden. Nur darf hierbei das eine nicht außer acht gelassen werden: Nicht mit beliebigen Ausgangsdreiecken gibt das Verfahren richtige Werte, sondern nur mit solchen, deren eine Seite ein Lot auf A ist (vom Endpunkt des zugehörigen Bogenstückes auf W_1).

Daß man vor Erhalt des gesuchten Gegenprofils als Hilfskonstruktion die Eingriffslinie erhält, ist stets von Wert, weil man aus ihrem Verlauf sofort über die wechselnde Richtung des Normaldruckes (gegeben durch die Fahrstrahlen zur Eingriffslinie E von C aus) und über den Überdeckungsgrad des Zahneingriffs ein Bild erhält und hierdurch auf zweckmäßige Verbesserung der Profile aufmerksam gemacht wird.

Auch das von einer Frässchnecke beim Abwälzverfahren erzeugte Profil ist ohne weiteres in ganz derselben Weise wie in Abb. 1 für jede beliebige Stelle des Fräsers sofort zu bestimmen. In diesem Falle wäre W_1 in Abb. 2 eine in C berührende Gerade.

Ergebnis. Die gute Anschaulichkeit des Schnellverfahrens befreit die Verzahnungslehre von einer stets unübersichtlichen und für den Anfänger undurchsichtig, ja geheimnisvoll erscheinenden Vorstellung, so daß es nicht nur seiner Schnelligkeit und Übersichtlichkeit wegen für die Praxis von Wert ist, sondern auch für alle Lehranstalten willkommen sein wird.

Erich Schneckenberg, Aachen. 104

Der Schraubenwirkungsgrad nach der Strahltheorie unter Berücksichtigung der achsialen und tangentialen Austrittsverluste. Unter der Voraussetzung, daß weit hinter der Schraube im Strahl der Druck der ungestörten Strömung herrsche, ist der Wirkungsgrad eines Schraubenringelementes

$$\eta = \frac{v_0}{u_1} \cdot \frac{c_a}{c_u} = \left(\frac{v_0}{u_1}\right)^2 \cdot \frac{c_a/v_0}{c_u/u_1}.$$

Hierbei ist v_0 die Fortschrittsgeschwindigkeit der Schraube gegenüber der ungestörten Strömung und v_1 gegenüber der Störung im Schraubenkreis, u_1 die Umfangsgeschwindigkeit des Schraubenelements, c_a und c_u die Komponenten der der Strömung erteilten Geschwindigkeitsänderungen in Richtung der Achse und des Umfangs (vgl. Abb. 1).

Abb. 1 und 2.

Die Kenngrößen sind dann:

Fortschrittsgrad

$$\lambda = \frac{v_0}{u_1},$$

Schubbelastungsgrad

$$\sigma = 2\frac{c_a}{v_0} \cdot \frac{v_1}{v_0},$$

Schubziffer

$$k_s = 2\frac{c_a}{u_1} \cdot \frac{v_1}{u_1} = \sigma \cdot \lambda^2.$$

Werden Reibung und Kontraktion ($u_1 = u_0$) vernachlässigbar, so ist

$$v_1 = v_0 + \frac{c_a}{2}$$

oder auch

$$v_1 = \frac{c_u}{c_a} \cdot \left(u - \frac{c_u}{2}\right)$$

(vgl. Abb. 2).

Somit wird

$$\sigma = 2\frac{c_a}{c_0}\left(1 + \frac{c_a}{2\,v_0}\right),$$

$$k_s = 2\frac{c_u}{u}\left(1 - \frac{c_u}{2\,u}\right).$$

Durch Auflösen nach $\frac{c_a}{v_0}$ bzw. $\frac{c_u}{u}$ ergibt sich

$$\frac{c_a}{v_0} = \sqrt{\sigma + 1} - 1,$$

$$\frac{c_u}{u} = 1 \overset{(+)}{-} \sqrt{1 - k_s}.$$

Hiermit erhält man

$$\eta = \lambda^2 \cdot \frac{\sqrt{\sigma + 1} - 1}{1 - \sqrt{1 - k_s}}.$$

Eine einfache Umformung ergibt hieraus

$$\eta = \lambda^2 \cdot \frac{\sigma}{k_s} \cdot \frac{1 + \sqrt{1 - k_s}}{1 + \sqrt{1 + \sigma}}$$

oder da $\lambda^2 \cdot \sigma = k_s$

$$\eta = \frac{2}{1 + \sqrt{1 + \sigma}} \cdot \frac{1 + \sqrt{1 - k_s}}{2}.$$

Hierbei stellt der erste Faktor den Einfluß der achsialen Austrittsverluste, der zweite Faktor den der tangentialen dar.

Da Schubziffer oder Schubbelastungsgrad über den Radius nie konstant sind, kann der Wirkungsgrad einer ganzen Schraube nur durch entspr. Integrationen gewonnen werden. Für praktische Bedürfnisse dürfte aber meist durch Abschätzung des Wirkungsgrades mit einem durch $r_m = 0{,}6 \div 0{,}75\ r_a$ zu definierenden mittleren Propellerelement der ganze Propeller zu ersetzen sein, wenn r_a den Außenradius einer zu der endlichvielflügeligen äquivalenten unendlichvielflügeligen bedeutet.

Charlottenburg. F. Weinig. 143

BUCHBESPRECHUNGEN

(Die hier angezeigten Bücher sind durch die VDI-Buchhandlung Berlin NW 7, Ingenieurhaus, zu beziehen.)

Vorträge aus dem Gebiete der Aerodynamik und verwandter Gebiete. (Aachen 1929.) Herausgegeben von **A. GILLES**, L. **HOPF**, TH. **KARMAN**. Mit 137 Abb. i. Text. Verlag Springer, Berlin 1930. 221 S. Preis 18,50 M, geb. 20 M.

Von diesem Buche mit dem merkwürdig verunglückten Titel kann man nur sagen, daß es eine ganze Reihe ausgezeichneter und in jedem Sinne beachtenswerter Beiträge zu den heute aktuellen Problemen der Hydrodynamik enthält. Ein Teil der in den Vorträgen zum Ausdruck kommenden Ergebnisse ist inzwischen schon durch andere, ausführlichere Veröffentlichungen der Verfasser bekannt geworden, so etwa der Versuch einer statistischen Theorie der Turbulenz von Burgers, die Darstellung der ebenen Strömung durch Kreiselräder von Spannhake, die Berechnungen von Tollmien über die Entstehung der Turbulenz, dann die Experimentalforschungen über Rohrströmung von Nikuradse, von Schiller usf. Es ist hier nicht möglich, sämtliche Gegenstände im einzelnen zu besprechen. Hervorgehoben sei etwa der einleitende Vortrag von Prandtl, der die Beeinflussung der Turbulenz durch verschiedene äußere Einwirkungen behandelt, namentlich durch eine Dichtenschichtung, wie sie durch verschiedenen Salzgehalt des Meerwassers oder durch verschiedene Temperaturen in der Luft bedingt sein kann. Von äußerster mathematischer Eleganz sind die Ausführungen von Levi-Civita, der sich der schwierigen Aufgabe unterzieht, die exakte Theorie der Grenzschichten in zäher Flüssigkeit auf zweidimensionale Gebiete zu übertragen, wobei Formeln der nichteuklidischen Geometrie zur Geltung kommen. Th. v. Kármán gibt eine elementare Abschätzung der Auftriebveränderungen, die durch Ungleichförmigkeiten im Anblasestrom hervorgerufen werden. Genannt seien ferner — ohne daß damit der Wert der übrigen Arbeiten zurückgesetzt sei — der Vortrag von Glauert über die Auftriebsverhältnisse eines Schwingenflügels, von Goldstein über die Wirbeltheorie des Propellers und die mit dem eigentlichen Thema der Vortragsreihe weniger zusammenhängenden Aufsätze von Prager über die Berechnung zweiholmiger freitragender Flügel und von Trefftz über Schwingungen von Kurbelwellen.

Über die Veranstaltung, auf der die Vorträge gehalten wurden, ist in dieser Zeitschrift bereits berichtet worden[1]). Man wird Herrn v. Kármán Dank dafür wissen, daß er auch für die zusammenfassende und übersichtliche Veröffentlichung der Vorträge in ausgezeichneter Weise gesorgt hat.

Mises. 170

Handbuch der physikalischen und technischen Mechanik. Herausgeg. von Prof. Dr. F. **AUERBACH** und Prof. Dr. W. **HORT**. Bd. II: Technische und physikalische Mechanik starrer Systeme. Zweiter Teil. Lieferung 2. Mit 266 Abb. im Text. Verlag Joh. Ambr. Barth, Leipzig 1930. XIV + S. 405—673. Preis 37,50 M. Bd. IV, 2. Hälfte. Technische Physik der festen Körper. Mit 533 Abb. im Text. Verlag Barth, Leipzig 1931. XIV + 614 S. Preis 98 M. Bd. VII: Grenzgebiete der technischen und physikalischen Mechanik. Lieferung 3. Mit 124 Abb. im Text. Verlag Barth, Leipzig 1930. VII + S. 491—814. Preis 45 M.

Der 2. Teil der Mechanik starrer Systeme bringt zunächst zwei größere Abschnitte von O. Martienssen über Kreiselbewegung und deren technische Anwendungen. Die Ausführungen geben einen guten Überblick über die wichtigsten in der Technik üblichen Kreiselkonstruktionen, ohne aus der mathematischen Theorie alle Folgerungen zu ziehen, zu denen sie führen könnte. Einen hübschen Aufsatz über elementare Demonstrationsversuche auf dem Gebiete der Mechanik starrer Körper steuert F. Auerbach bei, von dem auch ein besonderes Kapitel den verschiedenen Formen des einfachen und zusammengesetzten Pendels gewidmet wird. R. Beyer gibt eine kurze Über-

[1]) Diese Zeitschrift 9, 1929, S. 259.

sicht der graphischen Methoden, die in der technischen Kinetik gelegentlich gebraucht werden.

Die umfangreiche 2. Hälfte des IV. Bandes ist der Physik der festen nichtstarren Körper gewidmet. A. Smekal verbreitet sich über die moderne Molekulartheorie der Festigkeit, namentlich im Zusammenhang mit der Kristallstruktur der festen Körper. Die geometrische Theorie der Kristalle, ursprünglich von Weissenberg und Gonell bearbeitet, erscheint, nachdem die Verfasser selbst ihre Ausführungen nicht mehr für zeitgemäß halten, unter alleiniger Verantwortung der Redaktion. Die mehr technische Seite der Festigkeitslehre wird durch zwei von dem verstorbenen R. Baumann herrührende, von O. Schwarz nachträglich bearbeitete Kapitel über das „normale" und das „nichtnormale" Verhalten der technischen Feststoffe vertreten. Einem Bericht von F. Hülsenkamp über die klassische Theorie des Erddrucks gehen sehr interessante experimentelle Bemerkungen von K. v. Terzaghi voran.

Die Lieferung 3 des VII. Bandes behandelt eine Reihe von Fragen, die nach der gewöhnlichen Auffassung nicht mehr zur Mechanik gezählt werden, die Theorie der Konstitution der Materie, die chemische Statik und Kinetik, Diffusion, Osmose und ähnliches. Die Namen der Autoren K. Bennewitz, R. Fürth und andere bürgen für das Niveau der Beiträge. Mises. 170

Professor Dr. GERHARD **HESSENBERG**, Grundlagen der Geometrie. Herausgegeben von Dr. W. Schwan. Mit 77 Figuren. Göschens Lehrbücherei 1. Gruppe. Reine und angewandte Mathematik Bd. 17. Verlag Walter de Gruyter & Co., Berlin und Leipzig 1930. 141 S. Preis 7.80 M.

Aus dem Nachlasse des leider so unerwartet früh verstorbenen Verfassers ist ein von ihm fast vollendetes Manuskript über die Grundlagen der Geometrie herausgegeben worden. Es ist im Gegensatz zu den meisten Darstellungen dieses heiklen Gebietes eine durchaus lesbare. Der Verfasser hat es verstanden, den Leser andauernd über den eigentlichen Sinn, den Zweck und das Ziel der jeweiligen Fragestellung auf dem Laufenden zu halten. Wer für Grundlagenfragen Interesse besitzt, dem kann kein besseres Buch als Einführung empfohlen werden als das vorliegende.

Mises. 170

Dr. GERHARD **KOWALEWSKI**, o. ö. Professor der reinen Mathematik an der Technischen Hochschule zu Dresden. Alte und neue mathematische Spiele. Eine Einführung in die Unterhaltungsmathematik. Mit 104 Abb. und Anleitungen zur Herstellung des Spielgeräts. Verlag Teubner, Leipzig und Berlin 1930. VI + 145 S. Preis geb. 10 M.

Das hübsch ausgestattete Büchlein bespricht fünf verschiedene mathematische Spiele, die als Zeitvertreib für Leute, die viel Zeit haben, sehr wohl dienen können. Besonderen Wert legt der Verfasser darauf, zu zeigen, wie man sich das notwendige Spielzeug selbst herstellen kann. Daß die Erklärungen sachlich und leicht verständlich sind, ist bei dem bekannten pädagogischen Talent von G. Kowalewski nicht zu verwundern. Ob die heutige Zeit danach angetan ist, der Sache und damit dem Buche viele Liebhaber zu gewinnen, mag vielleicht fraglich erscheinen. Mises. 170

RUDOLF **FRANKE**, Eine vergleichende Schalt- und Getriebelehre. Neue Wege der Kinematik. Vortrag gehalten auf der wissenschaftlichen Tagung zur Feier des hundertsten Geburtstages von Franz Reuleaux am 11. November 1929 in der Technischen Hochschule zu Berlin. Mit 81 Abb. Verlag R. Oldenbourg, München und Berlin 1930. Preis geh. 4 M.

Der Verfasser hatte den Gedanken, die verschiedenen Schalteinrichtungen, die in der Elektrotechnik üblich sind, in eine solche Systematik zu bringen, daß sie sich der Reuleauxschen Systematik der kinematischen Elementenpaare gegenüberstellen läßt. Er führt in dem hier abgedruckten Vortrag diese Auffassung Schritt für Schritt an den verschiedenen Objekten durch. Es erscheint allerdings fraglich, ob damit für das eine oder das andere Aufgabengebiet etwas Wesentliches gewonnen wird. Der eigentliche Wert der Reuleauxschen Zwanglauflehre liegt nicht in der formalen Systematisierung, sondern in den weit tiefer liegenden und heute noch nicht ausgeschöpften Beziehungen seiner Auffassung zu der Kinetik mechanischer Systeme. Aber in dieser Richtung versagt die Analogie mit den elektrischen Schaltungen naturgemäß. Mises. 170

Jahrbuch des Forschungs-Instituts der Allgemeinen Elektricitätsgesellschaft. Erster Band 1928. 1929. Springer 1930. 240 S.

Wie bekannt, hat die AEG vor wenigen Jahren begonnen, ihre im Dienste der Industrie stehende technisch-wissenschaftliche Forschung in großzügig eingerichteten Forschungsinstituten zusammenzufassen. Das Jahrbuch, dessen erster Band hier vorliegt, hat den Zweck, die Ergebnisse der verschiedenen Untersuchungen, die in einer großen Reihe von Zeitschriften zur Veröffentlichung gelangen, einheitlich zusammenzufassen. Die meisten der Berichte, die in dem Bande zusammengestellt sind, betreffen Fragen der technischen Physik, die unserem Arbeitsgebiet etwas ferner stehen.

Mises. 170

Jahrbuch der Wissenschaftlichen Gesellschaft für Luftfahrt E. V. (W. G. L.) 1929. Verlag R. Oldenbourg, München und Berlin. 227 S.

Neben dem geschäftlichen Teil bringt das Jahrbuch eine ausführliche Wiedergabe der Vorträge, die bei der 18. Mitgliederversammlung in Berlin gehalten wurden. Von allgemeinerem Interesse ist der Bericht von Dornier über sein Flugschiff Do X, der Vortrag von Rumpler über die Frage des Langstreckenfluges mit den anschließenden Diskussionen. Eine wissenschaftlich bemerkenswerte Studie ist die von R. Fuchs vorgetragene Untersuchung über Berechnungen des Trudelfluges. Zahlreiche Berichte über Messungen an ausgeführten Flugzeugen, so die von Hübner über die Längsstabilität eines Junkers F. 13 ge oder die vergleichenden Leistungsmessungen von Pleines liefern wertvolles Material für flugtechnische Untersuchungen. Mises. 170

HIROHIKO **YOSHIDA**, Professor am Technical College in Fukui, Japan. Über das elastische Verhalten von Beton, mit besonderer Berücksichtigung der Querdehnung. Mit 59 Textabbildungen. Verlag Springer, Berlin 1930. VI + 114 S. Preis 11 M.

Der Verfasser beschreibt im wesentlichen die Versuche zur Bestimmung der Querdehnungszahl (des Poissonschen Koeffizienten) von Beton, die er im Institut für Beton und Eisenbeton an der Technischen Hochschule in Karlsruhe unter der Leitung von E. Probst durchgeführt hat. Die Querdehnungszahl, das Verhältnis von Längenänderung zu Querdehnung, wurde aus auf Druck beanspruchten unbewehrten Stäben von 50 cm

Länge und 144 cm^2 Querschnittsfläche bestimmt. Im großen ganzen ergaben sich, z. T. in Übereinstimmung mit anderweitigen Versuchen, die folgenden Resultate. Mit ansteigender Spannung nimmt die Querdehnungszahl ab, und zwar im allgemeinen um so mehr, je jünger der Probekörper, je größer der Wasserzusatz und je kleiner die Prismendruckfestigkeit ist. Bei einem Mischungsverhältnis 1 : 6 (d. h. 1 Gewichts-Teil Zement + 6 Teile Sand und Kies + 6,5 bis 10 Gewichts-% Wasser) ist sie bis zu Spannungen von etwa 50 kg/cm^2 unabhängig vom Alter und Wasserzusatz gleich 7, bei einem Mischungsverhältnis von 1 : 10 gleich 5,5 bis 6. Bei Lastwiederholungen auf dieselbe Spannung wächst die Querdehnungszahl, wobei ihr Wert bei einer höheren Spannung kleiner ist.

Ratzersdorfer. 169

Ferner sind bei der Schriftleitung folgende Bücher eingegangen (ausführliche Besprechung bleibt vorbehalten):

PAUL **TEREBEST**, Darmstadt. Rechenschablonen für harmonische Analyse und Synthese nach C. Runge. Wissenschaftliche Erläuterungen mit 8 Textabbildungen und 13 Tafeln. Dazu 26 Rechenschablonen, 2 Rechenbeispiele und 2 Kontrollblätter sowie 1 Gebrauchsanweisung. Verlag Julius Springer, Berlin 1930. Preis in Mappe 18 M.

Prof. Dr. LUDWIG **BIEBERBACH**, o. ö. Prof. an der Friedrich-Wilhelms-Universität in Berlin, Mitglied der Preuß. Akademie der Wissenschaften, Lehrbuch der Funktionentheorie. Bd. II: Moderne Funktionstheorie. Mit 47 Figuren im Text. Verlag und Druck von B. G. Teubner in Leipzig und Berlin 1931. IV + 370 S. Preis 20 M.

Prof. WILHELM **SPANNHAKE**, Professor an der Technisch. Hochschule Karlsruhe, Kreiselräder als Pumpen und Turbinen. Erster Band: Grundlagen und Grundzüge. Mit 182 Textabbildungen. Verlag Julius Springer, Berlin 1931. VIII + 320 S. Preis 29 M.

W. **NERNST**, o. Professor an der Universität Berlin, und

A. **SCHOENFLIES** †, o. ö. Professor der Mathematik an der Universität Frankfurt a. M., Einführung in die mathematische Behandlung der Naturwissenschaften. Kurzgefaßtes Lehrbuch der Differential- und Integralrechnung mit besonderer Berücksichtigung der Chemie. Elfte, von W. Nernst und Dr. W. Orthmann neubearbeitete Auflage. Mit 108 Figuren. Verlag von R. Oldenbourg, München und Berlin 1931. XIV + 478 S. Preis 20 M.

Veröffentlichungen des Forschungs-Institutes der Rhön-Rositten-Gesellschaft E. V. Nr. 4 Jahrbuch 1929 und Abhandlungen. Vorträge der I. Wissenschaftlichen Segelflugtagung. Herausgegeben von Direktor Dr. WALTER **GEORGII**, Prof. der Flugmeteorologie an der Techn. Hochschule Darmstadt. Verlag von R. Oldenbourg, München 1931. XVII + 132 S. 190 Abb. und 5 Zahlentafeln. Preis brosch. 15 M.

Bericht der Versuchsanstalt für Kraftfahrzeuge und des Festigkeitslaboratoriums der Technischen Hochschule zu Berlin von Dr.-Ing. GABRIEL **BECKER**, o. Prof., Dr.-Ing. HANS **FROMMM**, Privatdozent, Dr.-Ing. HERBERT **MARUHN**, Schwingungen in Automobillenkungen („Shimmy"). M. Krayn, Technischer Verlag G. m. b. H., Berlin 1931. 150 S. 118 Abbildungen.

Dr. HEINRICH **BLASIUS**, Studienrat an den Technischen Staatslehranstalten zu Hamburg, Wärmelehre. Physikalische Grundlagen vom technischen Standpunkt. Verlag Boysen & Maasch, Hamburg 1931. VIII + 232 S. 87 Fig. 13 Tabellen. 48 Aufgaben mit Lösungen. Preis 7,50 M.

RICHARD **Gans**, Sind wir an der Grenze der Meßmöglichkeit angelangt? Ein Beitrag zur Theorie der Molekularbewegung von Meßinstrumenten. Schriften der Königsberger Gelehrten-Gesellschaft. Naturwissenschaftliche Reihe, 7. Jahrg., 5. H. Verlag Max Niemeyer, Halle a. d. Saale 1930. 18 S. 4 Abb. Preis 2,80 M.

OSWALD **VEBLEN**, HENRY B. **FINE**, Prof. of Mathematics Princetown University, Analysis Situs. American Mathematical Society. Colloquium Publications. Volume V, Part II, Second Edition. 1931. X + 197 S. Preis 2 $.

HORACE **LAMB**, em. Professor der Mathematik an der Universität Manchester, Lehrbuch der Hydrodynamik. Autorisierte deutsche Ausgabe, 2. Aufl. (nach der 5. engl. Aufl.). Besorgt von Dr. Elise Helly, Wien. Mit Geleitwort und Zusätzen von R. von Mises, Prof. an der Universität Berlin. Mit 111 Figuren im Text. Verlag B. G. Teubner, Leipzig und Berlin 1931. XVI + 872 S. Preis 48 M.

Dr. GERHARD **KOWALEWSKI**, o. ö. Professor der reinen Mathematik an der Technischen Hochschule zu Dresden, Vorlesungen über Allgemeine natürliche Geometrie und Liesche Transformationsgruppen. Mit 16 Figuren. Göschens Lehrbücherei 1. Gr. 19 Bd. Verlag Walter de Gruyter & Co., Berlin und Leipzig 1931. 280 S. Preis 17 M.

Dr. PAUL **LORENZ**, Privatdozent, Der Trend. Ein Beitrag zur Methode seiner Berechnung und seiner Auswertung für die Untersuchung von Wirtschaftskurven und sonstigen Zeitreihen. Vierteljahrshefte zur Konjunkturforschung. Herausgegeben vom Institut für Konjunkturforschung (Leiter: Prof. Dr. Ernst Wagemann). Verlag Reimar Hobbing, Berlin. 104 S. Preis 14,40 M.

FRANZ **EISNER**, GÜNTHER **SUDECK**, RUDI **SCHRÖER** und OTTO **ZINKE**, Vergrößerung der effektiven Höhe von Flugzeugschleppantennen. (Luftfahrtforschung Band VIII, Heft 6.) 20 Abb., 12 Zahlentafeln. Verlag R. Oldenbourg, München 1931. 14 S. Preis 2,80 M.

Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik. Herausgegeben von der Preußischen Akademie der Wissenschaften. Schriftleiter Georg Feigl. Bd. 53, Jahrg. 1927. Sonderheft: Angewandte Mathematik. Verlag Walter de Gruyter & Co., Berlin und Leipzig 1931. Etwa 215 S. Preis 24 M.

Berichte a. d. Laboratorium für Verbrennungskraftmaschinen der Technischen Hochschule Stuttgart. 1. Heft: Dr.-Ing. OTTO **Lutz**, Untersuchungen über die Spülung von Zweitaktmotoren. Mit einem Vorwort von Prof. W. Maier, Vorstand des Laboratoriums für Verbrennungskraftmaschinen. Mit 63 Abb. Verlag Konrad Wittwer, Stuttgart 1931. 92 S. Preis kart. 8,50 M.

Dr. K. **SCHÜTT**, Einführung in die Physik des Fliegens. Mit 36 Schauversuchen und 87 Abb. (Luftfahrt und Schule. Im Auftrage des Deutschen Luftfahrt-Verbandes E. V. Heft 1.) Verlag C. J. E. Volckmann Nachf. G. m. b. H., Berlin-Charlottenburg 1931. 128 S. Preis 4 M.

NACHRICHTEN

Eugen Meyer †. Am 31. Dezember 1930 verschied nach langem schwerem Leiden der ordentliche Professor der Mechanik und Ehrenbürger der Technischen Hochschule Berlin, Geheimer Reg.-R. Dr. phil. h. c. Eugen Meyer in seiner Geburtsstadt Stuttgart. Mit ihm ging ein Mann von hoher wissenschaftlicher Begabung dahin, der zugleich von echtem Forschertrieb beseelt war, dem Streben zu erkennen, was die Welt im Innersten zusammenhält. Nicht das Aufstellen formaler Beziehungen ist seiner Überzeugung nach die vornehmste Aufgabe der wissenschaftlichen und technischen Forschung, sondern das Suchen nach wesentlichen Zusammenhängen, d. h. nach solchen, denen im Sinne eines Weltgeschehens eine Wirklichkeitsbedeutung zukommen könnte.

An ein solches Weltgeschehen unabhängig von der Auffassungs- und Vorstellungsgabe von uns kleinen Menschen glaubte Eugen Meyer. Er hatte es gleichsam erlebt in der Naturnähe, in der er in seiner engeren Heimat, dem Württembergerland, und insbesondere in seiner Vaterstadt Stuttgart aufgewachsen war und in die er sich zu jeder freien Zeit, in allen Ferien zurückgezogen fühlte. Sein Hang nach Naturschönheiten, seine Freude an Wiesenblumen und Vogelgesang sind Äußerungen seiner inneren Verbundenheit mit der Natur.

Geboren am 14. Mai 1868 zu Stuttgart-Berg als Sohn des Fabrikanten Heinrich Meyer, besuchte er das dortige Karlsgymnasium und das Realgymnasium und widmete sich dann dem Studium des Maschinenbaus an der dortigen Technischen Hochschule, wo insbesondere der Einfluß von C. Bach für lange Zeit richtungbestimmend für ihn wurde. Mit Abschluß des Studiums verließ er seine Heimat, um als Konstrukteur bei der Duisburger Maschinenbau A. G. und 1892 bei der Berlin-Anhalter Maschinenbau A. G.-Dessau tätig zu sein.

Auch an der Technik interessierten ihn vor allem die Naturvorgänge und ihre Beurteilung. Noch 1892 kam er als Assistent zu Stodola an das Eidgenössische Polytechnikum in Zürich, wo er sich 1893 als Privatdozent habilitierte. Dort begann er seine über ein Jahrzehnt ausgedehnten und in etwa 25 Arbeiten niedergelegten Untersuchungen über Gas- und Dampfmaschinen, die den Zweck verfolgten, den Arbeitsvorgang in allen Einzelheiten zu klären, Gesichtspunkte für die Verbesserung der Maschinen zu gewinnen und Maßstäbe zur Beurteilung und zum Vergleich verschiedener Bauarten und Arbeitsverfahren zu schaffen.

Besondere Beachtung verdient seine Frage nach dem günstigstem Kreisprozeß, mit dem man den aus dem Indikatordiagramm erkenntlichen wirklichen Kreisprozeß einer Maschine vergleichen muß, um den „Gütegrad" der Maschine (in thermischer Hinsicht) zu bestimmen. Man legte als günstigsten Kreisprozeß bis dahin den Carnotschen Kreisprozeß der Beurteilung zugrunde, nach welchem der Vergleich im wesentlichen von zwei Grenztemperaturen abhängt. E. Meyer wies darauf hin, daß diese Grenztemperaturen lediglich nach den Betriebsbedingungen und daher auch nach konstruktiven Bedingungen der Maschinen gewählt würden und daß man mit derselben Berechtigung auch andere Grenzen hinzuziehen könne und müsse, wie Druckgrenzen und vor allem Volumengrenzen. Er wies nach, daß auf Grund eines so gewählten Vergleichs-Kreisprozesses ein „Gütegrad" der Maschine bestimmt würde, der eine sehr viel bessere Bewertung der konstruktiven Durchbildung der Maschine liefere, als sie nach dem Carnotschen Kreisprozeß oder auch nach dem später zuerst in England eingeführten Clausius-Rankineschen Kreisprozeß möglich sei. So konnte er zeigen, daß das Dieselverfahren gegenüber dem Verfahren der Gemischkompression bei gleichem Gütegrad der Maschinen einen höheren thermischen Wirkungsgrad liefert, weil wegen des Fortfalls der Zündgefahr bei der Kompression der „schädliche Raum", d. h. die untere Volumengrenze sehr herabgedrückt werden könne.

Weiterhin beschäftigten Eugen Meyer Untersuchungen an Gaserzeugern, über Gaszusammensetzungen, über die Bedeutung des oberen und unteren Heizwertes für Gasmaschinen, über die Gemischbildung und über den Zündungsaugenblick und den Verbrennungsvorgang. Er zeigte, daß verspätete Zündung eine ähnliche Verzerrung des gewöhnlichen Indikatordiagramms hervorruft wie verminderte Verbrennungsgeschwindigkeit und daß sich beide Einflüsse aus „verschobenen" Diagrammen bequem getrennt erkennen lassen. Weiterhin hat er wertvolle Aufschüsse über Fehlerquellen am Indikator gegeben. An Darstellungen der Wärmebilanz von Gas- oder Dampfmaschinen knüpft er wertvolle kritische Betrachtungen.

Seine Arbeiten führten ihn bald zu hohem Ansehen bei Wissenschaftlern und Praktikern. Am 1. Oktober 1896 folgte er einem Ruf als Dozent an die Maschinenbauabteilung der Technischen Hochschule Hannover, wo er am 3. Juni 1897 das Prädikat Professor erhielt. Gerade damals strebte besonders F. Klein in Göttingen an, die wissenschaftliche Behandlung technischer Fragen in den Aufgabenkreis der Universität zu ziehen. Eugen Meyer wurde am 15. Oktober 1897 beauftragt, die endgültige Einrichtung der zum Physikalischen Institut der Universität Göttingen gehörigen Abteilung für angewandte Physik zu überwachen und wurde am 1. April 1898 a. o. Professor für technische Physik und landwirtschaftliche Maschinenkunde und Direktor des Instituts für technische Physik an der Universität Göttingen, die ihm später (1902) die Würde eines Dr. phil. h. c. verlieh. Am 1. Oktober 1900 folgte er seiner Berufung zum etatsmäßigen Professor der Mechanik und zum Vorsteher des Festigkeitslaboratoriums an der Technischen Hochschule Berlin. Daneben bekleidete er von 1902 ab eine a. o. Professur der technischen Physik an der Universität Berlin. Vom Verein Deutscher Ingenieure, in dessen Zeitschrift die meisten seiner Arbeiten erschienen sind wurde er neben anderen maßgebenden Persönlichkeiten mit der Aufstellung von Regeln für Leistungsversuche an Gasmaschinen und Gaserzeugern betraut, welche im Jahre 1906 angenommen wurden.

Als Vorsteher des Festigkeitslaboratoriums widmete er sich in späterer Zeit mehr Problemen der Festigkeit, denen er vor allem durch die Schule von C. Bach nahe stand. Hier wurde er durch seine Untersuchungen über die Härte bekannt, durch welche er dem Prüfverfahren von Brinell eine neuartige Deutung beilegte; er änderte die Berechnungsart nach mechanischen Gesichtspunkten ab und kam damit auf Grund seiner eigenen Versuche zu dem Ergebnis, daß zur Beurteilung der Härte eines Stoffes zwei Stoffkonstante anzugeben seien. Weiterhin behandelte er die Formänderungen eines gebogenen Stabes nach Überschreitung der Fließgrenze. Besonderes Interesse schenkte er dem zeitlichen Ablauf des Schlag-Druckversuches und des Zugversuches beim raschen Zerreißen sowie der Ausbildung der

Einschnürung beim Zerreißstab, ferner der Reibung fester Körper. Eine große Zahl von Arbeiten auf diesen Gebieten sind teils von ihm, teils unter seiner Förderung von seinen Mitarbeitern im Festigkeitslaboratorium entstanden.

Immer mehr aber erblickte er seine höchste Aufgabe darin, den angehenden Ingenieuren durch einen guten Unterricht in Mechanik eine Grundlage für ihr ganzes Studium und ihr weiteres Leben zu vermitteln, auch solchen, deren Hauptinteresse nicht in Richtung der wissenschaftlich exakten Denkungsweise liegt. Da er an sich selbst die Vertrautheit mit den Zusammenhängen des Naturgeschehens als Vorbedingung seiner Erfolge erkannt hatte, war er bestrebt, seine Hörer zum Verständnis durch Einfühlen in physikalische und technische Vorgänge zu führen. Eine große Anzahl von Modellen hat er entwickelt, welche der Veranschaulichung wichtiger Sätze der Mechanik dienen. Mit besonderem Geschick verstand er, wichtige Beziehungen klar und einleuchtend zu machen an Hand von Überlegungen, welche ihres mathematischen Gewandes nach Möglichkeit entkleidet waren, ohne scheinbar mathematisch strengeren Ausführungen an Beweiskraft nachzustehen.

In der Beurteilung der Leistungen zeichnete er sich durch eine hervorragende Menschenkenntnis und Gerechtigkeit aus. Nicht immer bequem in seiner herben kritischen Sachlichkeit und ungeschminkten Aufrichtigkeit, besaß er andererseits so viel Herzensgüte und Verständnis für individuelle Unterschiede, daß er in seinen Entscheidungen unnötige Härten vermied.

Der Erfolg auch im Unterricht hat ihm von seiten seiner Schüler und Kollegen viel Anerkennung gebracht. Am 17. Dezember 1915 erfolgte seine Ernennung zum Geheimen Regierungsrat und noch kurz vor seinem Tode die Ernennung zum Ehrenbürger der Technischen Hochschule Berlin, nachdem er nach längerer Beurlaubung bereits am 1. Juli 1930 wegen seiner Erkrankung emeritiert worden war.

Die Ehrfurcht vor der Wahrheit und Wirklichkeit, mit der er sein Werk trieb, war der Ursprung seiner wissenschaftlichen und pädagogischen Sorgfalt und seiner durch keine Widerwärtigkeiten beugsamen Wahrheitsliebe. Er wird allen ernsthaften und strebsamen Ingenieuren und Wissenschaftlern, die ihn kennen gelernt haben, als ein edler Mensch von hohem Streben und vorbildlicher Berufsfreudigkeit in Erinnerung bleiben. Wer ihm nahestand und den seltenen Reichtum seines Innenlebens voll sonnigen Humors und ehrlicher Freudlichkeit erfahren konnte, wird seiner als eines feinfühligen Geistes gedenken, der in seinem Leben eine große Liebesverpflichtung fühlte und betätigte. Hans Fromm. 158

Gesellschaft für angewandte Mathematik und Mechanik.

Ortsgruppe Berlin.

Am 8. Mai spricht Hr. Dr. H. Fromm (Berlin) über „Schwingungen in Automobillenkungen, Vorführung eines Schwingungszerlegers".

Prager Mitglieder.

Am 12. März sprach Hr. Dr. Walter Lohmann (Hannover) über „Eigenschwingungen von Dampfturbinenschaufeln unter allgemeinen Bedingungen".

Hauptversammlung.

Die diesjährige Hauptversammlung findet beschlußgemäß gemeinschaftlich mit der Tagung der Deutschen Mathematiker-Vereinigung, der Deutschen Physikalischen Gesellschaft und der Deutschen Gesellschaft für technische Physik in Bad Elster in der Zeit vom 13. bis 18. September statt. Die Mitglieder werden gebeten, Vorträge für die Hauptversammlung beim Geschäftsführer, Prof. v. Mises-Berlin, oder beim Vorsitzenden, Prof. Prandtl-Göttingen, anzumelden.

Persönliches.

Hr. Dr. E. Chwalla, bisher an der Technischen Hochschule in Wien, ist zum o. Prof. der Baumechanik an der Deutschen Technischen Hochschule in Brünn ernannt worden.

Hr. Dr. H. Hencky, bisher Lektor an der Technischen Hochschule in Delft, ist als Associate Professor of Mechanics an das Massachusetts Institute of Technology, Department of Mechanical Engineering, berufen worden.

Hr. Prof. Dr. Karl Federhofer in Graz ist als o. Prof. der technischen Mechanik an die Technische Hochschule in München berufen worden.

III. Internationaler Kongreß für Technische Mechanik in Stockholm.

Soeben ist der Kongreßbericht, herausgegeben im Auftrage des Organisationskomitees von C. W. Oseen und W. Weibull, erschienen[1]). Er umfaßt drei stattliche Quartbände, die auf fast 1500 Seiten mit zahlreichen Abbildungen den Wortlaut sämtlicher in Stockholm gehaltenen Vorträge wiedergeben. Auch ein großer Teil der in den Diskussionen gefallenen Bemerkungen ist mit aufgenommen worden. Man wird den Veranstaltern Dank dafür wissen, daß sie ihre ausgezeichnete Organisationsarbeit durch die so schnelle und mustergültige Herausgabe der Verhandlungen in so vortrefflicher Weise zum Abschluß gebracht haben. 171

[1]) Zu beziehen durch die VDI-Buchhandlung, Berlin NW 7, Ingenieurhaus, zum Preise von RM 145.60.

EINBANDDECKEN FÜR DEN JAHRGANG 1930
Erst durch das Einbinden wird der beendete Jahrgang zu einem handlichen und übersichtlichen Nachschlagewerk, so daß Sie seinen Inhalt jederzeit bequem auswerten können. Wir haben deshalb auch für den Band 1930 der Zeitschrift für angewandte Mathematik und Mechanik wieder Einbanddecken herstellen lassen, die zum Preise von 2.50 RM (für VDI-Mitglieder 2.25 RM) durch jede Buchhandlung bezogen werden können
VDI-VERLAG G. M. B. H., BERLIN NW 7

Für die Schriftleitung verantwortlich: Professor Dr. von Mises, Berlin NW 87, Siegmundshof 9; für den Anzeigenteil: Peter Valerius, Berlin NW 40. — Copyright 1931 by VDI-Verlag G. m. b. H., Berlin NW 7.
Druck von A. W. Zickfeldt, Osterwieck am Harz.